Geofisica Matematica: Dalla Teoria alla Comprensione del Sistema Terra

Fondamenti Matematici della Geofisica

Introduzione: L'Unione tra Matematica e Scienza della Terra

La geofisica è senz'altro una delle discipline scientifiche più affascinanti e complesse, collocandosi all'intersezione tra la fisica, la matematica, la geologia e le scienze ambientali. Essa si propone di comprendere i processi fisici che governano il nostro pianeta, dalla sua struttura interna profonda fino alle manifestazioni superficiali, dalle oscillazioni sismiche che attraversano il mantello terrestre alle correnti oceaniche che ridistribuiscono il calore globale, dai campi magnetici generati nel nucleo esterno liquido alle onde gravitazionali che perturbano impercettibilmente la forma del geoide.

La matematica costituisce il linguaggio fondamentale attraverso cui possiamo descrivere, modellare e prevedere i fenomeni geofisici. Senza gli strumenti matematici appropriati, la nostra comprensione della Terra rimarrebbe limitata a descrizioni qualitative e osservazioni empiriche disconnesse. È attraverso le equazioni differenziali parziali che descriviamo la propagazione delle onde sismiche; attraverso la teoria del potenziale che interpretiamo le anomalie gravitazionali e magnetiche; attraverso l'analisi armonica sferica che rappresentiamo i campi globali; attraverso la teoria dell'elasticità che comprendiamo le deformazioni della crosta terrestre.

Questo paper si propone di esaminare le basi matematiche della geofisica moderna, partendo dai principi fondamentali della fisica matematica e procedendo verso applicazioni sempre più specifiche e sofisticate. Esamineremo come i concetti astratti della matematica pura trovino realizzazione concreta nei fenomeni terrestri, e come viceversa le sfide poste dalla comprensione del sistema Terra abbiano stimolato lo sviluppo di nuove tecniche matematiche.

I Fondamenti della Meccanica del Continuo

La maggior parte dei fenomeni geofisici può essere descritta utilizzando il formalismo della meccanica del continuo, che tratta la materia come un mezzo continuo piuttosto che come un insieme discreto di particelle. Questa approssimazione è giustificata quando le scale di lunghezza dei fenomeni che ci interessano sono molto maggiori delle scale atomiche o molecolari, condizione che è certamente soddisfatta per la quasi totalità dei processi geofisici.

Il punto di partenza della meccanica del continuo è il concetto di campo. Un campo è una funzione che assegna a ogni punto dello spazio e a ogni istante temporale una quantità fisica di interesse. Possiamo avere campi scalari, come la densità $\rho(x,y,z,t)$ o la temperatura

T(x,y,z,t), campi vettoriali come la velocità v(x,y,z,t) o il campo magnetico B(x,y,z,t), e campi tensoriali come il tensore degli sforzi σ_ij(x,y,z,t).

La descrizione matematica del movimento di un continuo richiede l'introduzione di due sistemi di coordinate distinti: le coordinate lagrangiane, che seguono le singole particelle materiali nel loro movimento, e le coordinate euleriane, che sono fisse nello spazio. In coordinate lagrangiane, identifichiamo ogni particella materiale mediante la sua posizione iniziale X = (X_1, X_2, X_3) al tempo t = 0, e descriviamo la sua posizione al tempo t mediante la funzione x = χ(X,t). In coordinate euleriane, invece, ci concentriamo su un punto fisso dello spazio x e descriviamo le proprietà del materiale che passa per quel punto al tempo t.

La relazione tra queste due descrizioni è governata dalla derivata materiale, definita come D/Dt = ∂/∂t + v·∇, dove v è il campo di velocità e ∇ è l'operatore gradiente. Questa derivata descrive il tasso di variazione di una quantità fisica seguendo il movimento del materiale. Ad esempio, la derivata materiale della densità Dρ/Dt rappresenta la variazione di densità di una particella materiale specifica mentre si muove attraverso lo spazio.

Le leggi fondamentali della meccanica del continuo sono espresse attraverso principi di conservazione. La conservazione della massa è espressa dall'equazione di continuità: ∂ρ/∂t + ∇·(ρv) = 0, che afferma che la variazione locale di densità è bilanciata dal flusso di massa attraverso la superficie che racchiude il volume considerato. In forma lagrangiana, questa equazione assume la forma più semplice Dρ/Dt + ρ∇·v = 0.

La conservazione della quantità di moto è espressa dalle equazioni di Cauchy: ρ Dv/Dt = ∇·σ + ρf, dove σ è il tensore degli sforzi e f rappresenta le forze di volume per unità di massa, come la gravità. Queste equazioni affermano che l'accelerazione di un elemento di fluido è determinata dal gradiente degli sforzi interni e dalle forze esterne. Il tensore degli sforzi σ_ij rappresenta la forza per unità di area che agisce nella direzione i su una superficie con normale nella direzione j.

La conservazione dell'energia completa il quadro delle leggi fondamentali. In forma generale, l'equazione dell'energia può essere scritta come ρ De/Dt = σ_ij ∂v_i/∂x_j - ∇·q + ρr, dove e è l'energia interna specifica, q è il flusso di calore e r rappresenta fonti interne di energia come il decadimento radioattivo. Questa equazione afferma che la variazione di energia interna è determinata dal lavoro delle forze interne, dal flusso di calore e dalle sorgenti interne.

Le Equazioni Costitutive e la Reologia

Le equazioni di conservazione da sole non sono sufficienti a determinare completamente il comportamento di un mezzo continuo. Abbiamo bisogno di equazioni costitutive che specifichino come il materiale risponde agli sforzi applicati. Queste equazioni dipendono dalla natura fisica del materiale e possono essere estremamente complesse per i materiali terrestri.

Il caso più semplice è quello di un fluido perfetto (non viscoso), per il quale il tensore degli sforzi è puramente isotropo: σ_ij = -p δ_ij, dove p è la pressione e δ_ij è il delta di Kronecker.

Questa relazione implica che un fluido perfetto non può sostenere sforzi di taglio e che la pressione agisce ugualmente in tutte le direzioni.

Per un fluido newtoniano viscoso, la relazione costitutiva diventa più complessa. Il tensore degli sforzi si decompone in una parte isotropa (la pressione) e una parte deviatorica che dipende dal tasso di deformazione: $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda (\partial v_k/\partial x_k) \delta_{ij} + \mu (\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$, dove λ e μ sono i coefficienti di viscosità di Lamé. Il secondo coefficiente, μ, è chiamato viscosità dinamica o viscosità di taglio, mentre la combinazione $\zeta = \lambda + (2/3)\mu$ è chiamata viscosità di volume.

Per i solidi elastici, la relazione costitutiva collega gli sforzi alle deformazioni piuttosto che ai tassi di deformazione. Nel caso più semplice di un solido elastico lineare isotropo, la legge di Hooke generalizzata si scrive: $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$, dove ε_{ij} è il tensore delle deformazioni infinitesime definito come $\varepsilon_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$, con u che rappresenta il campo di spostamento. I parametri λ e μ sono ora le costanti elastiche di Lamé, e sono legati al modulo di Young E e al rapporto di Poisson v dalle relazioni $\lambda = Ev/((1+v)(1-2v))$ e $\mu = E/(2(1+v))$.

La reologia dei materiali terrestri è tuttavia molto più complessa di queste idealizzazioni semplici. Il mantello terrestre, ad esempio, si comporta come un solido elastico su scale temporali brevi (secondi o minuti, come durante il passaggio di onde sismiche), ma come un fluido viscoso su scale temporali lunghe (milioni di anni, come nei processi di convezione mantellica). Questo comportamento è descritto mediante modelli viscoelastici, che combinano aspetti elastici e viscosi.

Un modello viscoelastico semplice è il modello di Maxwell, in cui si immagina che il materiale sia rappresentato da una molla (elemento elastico) in serie con un ammortizzatore (elemento viscoso). L'equazione costitutiva per questo modello è: $\sigma + (\mu/\eta)(\partial\sigma/\partial t) = 2\mu \partial\varepsilon/\partial t$, dove η è la viscosità. Questo modello prevede che sotto un carico costante il materiale inizialmente si deforma elasticamente ma poi continua a deformarsi lentamente (fenomeno del creep), mentre se viene deformato istantaneamente e poi mantenuto a deformazione costante, lo sforzo decade gradualmente (fenomeno del rilassamento).

Per descrivere il comportamento reologico complesso del mantello, sono stati sviluppati modelli più sofisticati che includono dipendenze non lineari dalla temperatura, dalla pressione e dal tasso di deformazione. La legge di potenza è particolarmente importante: il tasso di deformazione è proporzionale a una potenza dello sforzo, $\dot{\varepsilon} = A \sigma^n \exp(-Q/(RT))$, dove A è un fattore pre-esponenziale, n è l'esponente della legge di potenza (tipicamente tra tre e cinque per il mantello), Q è l'energia di attivazione, R è la costante dei gas e T è la temperatura assoluta.

La Teoria dell'Elasticità Lineare

La teoria dell'elasticità lineare fornisce il fondamento matematico per comprendere la propagazione delle onde sismiche e le deformazioni della crosta terrestre. Questa teoria assume che le deformazioni siano sufficientemente piccole che la relazione tra sforzi e deformazioni possa essere linearizzata, e che il materiale ritorni allo stato originale quando gli sforzi vengono rimossi.

Combinando la legge di Hooke generalizzata con le equazioni del moto, otteniamo l'equazione fondamentale dell'elastodinamica: $\rho \partial^2 u/\partial t^2 = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u + f$, dove u è il vettore spostamento e f rappresenta le forze di volume. Questa è un'equazione vettoriale che in realtà rappresenta tre equazioni scalari accoppiate, una per ogni componente dello spostamento.

Un risultato fondamentale della teoria è il teorema di decomposizione di Helmholtz, che afferma che qualsiasi campo vettoriale sufficientemente regolare può essere decomposto in una parte irrotazionale (potenziale scalare) e una parte solenoidale (potenziale vettoriale): $u = \nabla\varphi + \nabla\times\psi$, dove $\nabla\cdot\psi = 0$. Applicando questa decomposizione all'equazione dell'elastodinamica, otteniamo due equazioni disaccoppiiate: una per il potenziale scalare φ, che descrive le onde longitudinali o onde P (onde primarie), e una per il potenziale vettoriale ψ, che descrive le onde trasversali o onde S (onde secondarie).

Le onde P sono caratterizzate dal fatto che la particella oscilla nella direzione di propagazione dell'onda, e soddisfano l'equazione d'onda: $\partial^2\varphi/\partial t^2 = \alpha^2 \nabla^2\varphi$, dove $\alpha = \sqrt{((\lambda+2\mu)/\rho)}$ è la velocità delle onde P. Le onde S hanno oscillazioni perpendicolari alla direzione di propagazione e soddisfano: $\partial^2\psi/\partial t^2 = \beta^2 \nabla^2\psi$, dove $\beta = \sqrt{(\mu/\rho)}$ è la velocità delle onde S. Poiché λ e μ sono entrambi positivi per materiali stabili, si ha sempre $\alpha > \beta$, il che spiega perché le onde P arrivano prima delle onde S in una registrazione sismica.

Soluzioni particolarmente importanti delle equazioni elastiche sono le onde piane, della forma $u = A \exp(i(k\cdot x - \omega t))$, dove A è il vettore ampiezza (che può essere complesso), k è il vettore d'onda e ω è la pulsazione. Sostituendo questa forma nell'equazione dell'elastodinamica, otteniamo una relazione di dispersione che lega ω a k. Per un mezzo omogeneo e isotropo, le onde P hanno $\omega = \alpha|k|$ e le onde S hanno $\omega = \beta|k|$, mostrando che entrambe le onde sono non dispersive (la velocità di fase non dipende dalla frequenza).

La Propagazione delle Onde in Mezzi Stratificati

La Terra non è un mezzo omogeneo, ma presenta una struttura stratificata con proprietà che variano con la profondità. La comprensione della propagazione delle onde sismiche in mezzi stratificati è fondamentale per l'interpretazione dei sismogrammi e per la determinazione della struttura interna della Terra.

Consideriamo prima il caso più semplice di un'onda piana che incide su un'interfaccia piana tra due mezzi elastici con proprietà diverse. Quando l'onda incidente colpisce l'interfaccia, si generano in generale quattro onde: un'onda P riflessa e un'onda S riflessa nel primo mezzo, e un'onda P trasmessa e un'onda S trasmessa nel secondo mezzo. Questo fenomeno di conversione di modo è caratteristico dei mezzi elastici e non ha analogo nelle onde acustiche scalari.

Le ampiezze delle varie onde sono determinate dalle condizioni al contorno all'interfaccia, che richiedono la continuità dello spostamento e della trazione. In forma matematica, queste condizioni si scrivono: $u^{(1)} = u^{(2)}$ e $\sigma^{(1)}\cdot n = \sigma^{(2)}\cdot n$, dove l'apice indica il mezzo e n è la normale all'interfaccia. Applicando queste condizioni e utilizzando la forma delle onde piane, otteniamo un sistema di equazioni lineari per i coefficienti di riflessione e trasmissione, noto come equazioni di Zoeppritz.

Le equazioni di Zoeppritz sono piuttosto complicate e non ammettono soluzioni in forma chiusa semplice. Tuttavia, in casi particolari si possono ottenere formule approssimate. Ad esempio, per incidenza normale (angolo di incidenza zero), i coefficienti di riflessione e trasmissione dipendono solo dall'impedenza acustica $Z = \rho\alpha$ dei due mezzi. Il coefficiente di riflessione per le onde P è $R = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$, mentre il coefficiente di trasmissione è $T = 2Z_1/(Z_2 + Z_1)$.

Per mezzi con molti strati, la situazione diventa ancora più complessa. Ogni interfaccia genera riflessioni e trasmissioni multiple, e le varie onde si sovrappongono creando un campo d'onda estremamente complicato. Il metodo della matrice di propagazione è particolarmente utile in questo contesto. Si rappresenta la relazione tra i campi d'onda sopra e sotto ogni strato mediante una matrice, e la propagazione attraverso l'intera struttura stratificata è descritta dal prodotto di queste matrici.

Un fenomeno importante che emerge in mezzi stratificati è la dispersione delle onde superficiali. Le onde di Rayleigh, che si propagano lungo la superficie libera di un semispazio elastico, e le onde di Love, che si propagano in uno strato elastico sopra un semispazio, hanno velocità che dipendono dalla frequenza. Questa dispersione è causata dal fatto che onde con diverse lunghezze d'onda "sentono" diverse porzioni della struttura verticale. Le onde a periodo lungo penetrano più profondamente e sono influenzate dalle proprietà degli strati profondi, mentre le onde a periodo corto rimangono confinate vicino alla superficie.

L'analisi della dispersione delle onde superficiali è uno strumento potente per determinare la struttura della velocità sismica in funzione della profondità. Misurando la velocità di fase o di gruppo come funzione del periodo, e invertendo queste curve di dispersione mediante tecniche matematiche appropriate, possiamo ricostruire il profilo di velocità. Questo metodo è ampiamente utilizzato sia in sismica di esplorazione (per profondità di poche centinaia di metri) sia in sismologia globale (per investigare la struttura della crosta e del mantello superiore).

Le Equazioni della Fluidodinamica Geofisica

Molti fenomeni geofisici coinvolgono il movimento di fluidi: l'atmosfera, gli oceani, il nucleo esterno liquido della Terra, e anche il mantello su scale temporali geologiche. La descrizione matematica di questi flussi richiede le equazioni della fluidodinamica, opportunamente modificate per tenere conto degli effetti specifici rilevanti in geofisica.

Il punto di partenza sono le equazioni di Navier-Stokes, che esprimono la conservazione della quantità di moto per un fluido viscoso: $\rho(\partial v/\partial t + v\cdot\nabla v) = -\nabla p + \mu\nabla^2 v + (\zeta + \mu/3)\nabla(\nabla\cdot v) + \rho g$, dove g è l'accelerazione di gravità. Queste equazioni, accoppiate con l'equazione di continuità e con un'equazione di stato che lega densità, pressione e temperatura, formano un sistema chiuso.

Un aspetto cruciale della fluidodinamica geofisica è che i flussi avvengono in un sistema di riferimento rotante (la Terra che ruota attorno al suo asse). Questo introduce forze apparenti che hanno un effetto profondo sulla dinamica. La forza di Coriolis, in particolare, è responsabile della deviazione dei venti e delle correnti oceaniche, e gioca un ruolo fondamentale nella formazione dei cicloni, delle correnti oceaniche e di molti altri fenomeni.

In un sistema di riferimento rotante con velocità angolare Ω, l'accelerazione di una particella di fluido include termini aggiuntivi: a = a_inerziale - 2Ω×v - Ω×(Ω×r), dove il secondo termine è l'accelerazione di Coriolis e il terzo è l'accelerazione centrifuga. Per la Terra, |Ω| ≈ 7,292 × 10^(-5) rad/s, che corrisponde a un periodo di rotazione di ventiquattro ore.

L'importanza relativa della forza di Coriolis rispetto ad altri termini nell'equazione del moto è quantificata dal numero di Rossby: Ro = U/(fL), dove U è una velocità caratteristica, L è una scala di lunghezza caratteristica, e f = 2Ω sin(φ) è il parametro di Coriolis alla latitudine φ. Quando Ro << 1, la dinamica è dominata dalla rotazione (regime geostrofico), mentre quando Ro >> 1, gli effetti di rotazione sono trascurabili.

Un altro parametro adimensionale fondamentale è il numero di Reynolds: Re = ρUL/μ, che misura l'importanza relativa dei termini di inerzia rispetto ai termini viscosi. Per molti flussi geofisici, Re è estremamente grande (dell'ordine di 10^6 o superiore), indicando che il flusso è turbolento. La turbolenza geofisica è caratterizzata da una cascata di energia dalle scale grandi (dove l'energia è iniettata, ad esempio dal riscaldamento solare disomogeneo) alle scale piccole (dove è dissipata dalla viscosità).

La Teoria del Potenziale Gravitazionale

Il campo gravitazionale terrestre è uno degli osservabili geofisici più importanti. Le variazioni spaziali della gravità riflettono la distribuzione della massa all'interno della Terra e forniscono informazioni cruciali sulla struttura interna del pianeta, dalle anomalie locali associate a giacimenti minerari o a strutture geologiche, fino alle grandi anomalie associate alla geometria del geoide.

Il potenziale gravitazionale φ generato da una distribuzione di massa con densità ρ(x',y',z') soddisfa l'equazione di Poisson: $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$, dove G = 6,674 × 10^(-11) m³/(kg·s²) è la costante gravitazionale universale. Nello spazio esterno alle masse (ρ = 0), il potenziale soddisfa l'equazione di Laplace: $\nabla^2\varphi = 0$.

Una soluzione fondamentale dell'equazione di Poisson è il potenziale di una massa puntiforme m situata nell'origine: φ = -Gm/r, dove $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ è la distanza dall'origine. Il campo gravitazionale è il gradiente negativo del potenziale: g = -∇φ. Per la massa puntiforme, questo dà g = -Gm r/r³, che è la famosa legge dell'inverso del quadrato della distanza.

Per una distribuzione arbitraria di massa, il potenziale può essere calcolato mediante l'integrale: $\varphi(x,y,z) = -G \iiint \rho(x',y',z')/|r-r'|\, dx'dy'dz'$, dove r = (x,y,z) è il punto dove si calcola il potenziale e r' = (x',y',z') varia su tutto il volume contenente la massa. Questo integrale, chiamato integrale di Newton, esprime il principio di sovrapposizione: il potenziale totale è la somma dei potenziali generati da ciascun elemento di massa.

La soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche è naturalmente espressa in termini di armoniche sferiche. Il potenziale può essere sviluppato in serie: φ(r,θ,λ) = GM/r [1 + Σ(n=2 a ∞) Σ(m=0 a n) (a/r)^n P_nm(cos θ)(C_nm cos(mλ) + S_nm sin(mλ))], dove r è la distanza dal centro della Terra, θ è la colatitudine, λ è la longitudine, a è il raggio medio terrestre, P_nm sono i polinomi di Legendre associati, e C_nm e S_nm sono i coefficienti dello sviluppo.

Il coefficiente dominante dopo il termine monopolare è J_2 = C_20 ≈ 1,082 × 10^(-3), che rappresenta lo schiacciamento ai poli dovuto alla rotazione terrestre. Questo coefficiente è responsabile della precessione degli equinozi e di molte altre perturbazioni nel moto dei satelliti artificiali. I coefficienti di ordine superiore rappresentano deviazioni sempre più sottili dalla simmetria sferica e riflettono la distribuzione eterogenea della massa all'interno della Terra.

Sismologia e Struttura Interna della Terra

La Teoria dei Raggi Sismici

La teoria dei raggi fornisce un'approssimazione geometrica alla propagazione delle onde sismiche che è estremamente utile per comprendere il percorso delle onde attraverso la struttura interna della Terra. Questa teoria è valida quando la lunghezza d'onda è molto piccola rispetto alle scale di variazione delle proprietà del mezzo, condizione che è soddisfatta per molte applicazioni sismologiche.

Il principio fondamentale della teoria dei raggi è il principio di Fermat, che afferma che il percorso seguito da un raggio tra due punti è quello che rende stazionario (tipicamente minimo) il tempo di percorrenza. Matematicamente, questo si esprime come $\delta\int(ds/v) = 0$, dove l'integrale è calcolato lungo il percorso del raggio, ds è l'elemento di lunghezza d'arco e v è la velocità locale dell'onda.

Applicando il calcolo delle variazioni al principio di Fermat, si ottiene l'equazione del raggio, che in forma vettoriale si scrive: $d/ds(T/v) = \nabla T$, dove $T = 1/v$ è la lentezza. Questa equazione descrive come il raggio si curva in un mezzo con velocità variabile. In coordinate cartesiane, le equazioni parametriche del raggio sono: $d^2x_i/ds^2 = \partial(1/v)/\partial x_i\ (v^2)$, per i = 1, 2, 3.

Un caso importante è quello di un mezzo stratificato orizzontalmente, dove la velocità dipende solo dalla profondità z: v = v(z). In questo caso, esiste una quantità conservata lungo il raggio, chiamata parametro del raggio p, definito come p = sin(i)/v, dove i è l'angolo che il raggio forma con la verticale. Questa conservazione è analoga alla legge di Snell per la rifrazione della luce e permette di calcolare facilmente la traiettoria del raggio.

Per un modello sferico della Terra, dove la velocità dipende solo dal raggio r dal centro, il parametro del raggio diventa p = (r sin i)/v(r), e questa quantità rimane costante lungo tutto il percorso del raggio. Utilizzando questa conservazione, possiamo calcolare la distanza angolare Δ percorsa dal raggio e il tempo di percorrenza τ mediante gli integrali: $\Delta = 2\int(r_0 \text{ a } r_s)\ p/(r\sqrt{(r^2p^2/v^2 - 1)})\ dr$ e $\tau = 2\int(r_0 \text{ a } r_s)\ (r^2p)/(v^2\sqrt{(r^2p^2/v^2 - 1)})\ dr$, dove r_0 è il raggio dove il raggio parte dalla superficie, r_s è il raggio del punto di inversione più profondo (dove il raggio diventa orizzontale), e il fattore due tiene conto del percorso di andata e ritorno.

La teoria dei raggi permette di comprendere molte caratteristiche osservate nei sismogrammi. Ad esempio, l'esistenza di zone d'ombra sismica, regioni sulla superficie terrestre dove certi tipi di onde non arrivano, può essere spiegata come conseguenza della rifrazione dei raggi in regioni dove la velocità diminuisce con la profondità. La famosa zona d'ombra per le onde P dirette, che si estende approssimativamente da 103° a 143° di

distanza epicentrale, è causata dalla forte diminuzione di velocità al confine mantello-nucleo esterno.

Il Problema Diretto e Inverso in Sismologia

Un problema fondamentale in sismologia è determinare la struttura della velocità sismica all'interno della Terra a partire dai tempi di percorrenza osservati delle onde sismiche. Questo è un esempio di problema inverso: dato l'effetto (i tempi di arrivo), vogliamo inferire la causa (la distribuzione di velocità).

Il problema diretto consiste nel calcolare i tempi di percorrenza per un dato modello di velocità. Utilizzando la teoria dei raggi, abbiamo visto che il tempo è dato da un integrale del tipo $\tau(p) = 2\int(r_s \text{ a } r_0) (r^2p)/(v^2\sqrt{(r^2p^2/v^2 - 1)}) dr$, dove la profondità del punto di inversione r_s è determinata implicitamente dalla condizione $r_s \, p/v(r_s) = 1$. Dato $v(r)$ e p, possiamo calcolare numericamente questo integrale.

Il problema inverso è molto più delicato. Dati i tempi di percorrenza $\tau(\Delta)$ come funzione della distanza epicentrale Δ, vogliamo determinare $v(r)$. Questo problema fu risolto per la prima volta da Herglotz e Wiechert agli inizi del ventesimo secolo. La loro soluzione si basa sull'inversione di una trasformata integrale. La formula di Herglotz-Wiechert esprime la velocità in funzione della profondità come: $v(r) = (r/p) \exp(\int(p_{max} \text{ a } p) \cosh^{(-1)}(v(r_0)/rp) d\tau/dp \, dp)$, dove p_{max} è il parametro del raggio che corrisponde a un raggio orizzontale alla profondità r.

Questa formula mostra che in linea di principio la struttura della velocità può essere determinata univocamente dai tempi di percorrenza, almeno sotto certe ipotesi semplificatrici (sfericità, dipendenza solo dal raggio, ecc.). Tuttavia, in pratica ci sono molte complicazioni. I dati sono discreti e affetti da errori, il modello sferico è solo un'approssimazione, e la Terra presenta discontinuità e zone a bassa velocità che richiedono trattamenti speciali.

La moderna inversione sismica utilizza tecniche più sofisticate basate sulla minimizzazione di funzionali. Si definisce una funzione obiettivo che misura la discrepanza tra i dati osservati e quelli predetti da un modello: $S[v] = \Sigma_i w_i (\tau_i^{oss} - \tau_i^{calc}[v])^2$, dove la somma è su tutte le osservazioni, w_i sono pesi appropriati, e $\tau_i^{calc}[v]$ è il tempo calcolato per il modello v. Si cerca poi il modello v che minimizza S, tipicamente utilizzando metodi iterativi come il metodo dei minimi quadrati linearizzati.

Un aspetto cruciale è che il problema inverso è generalmente mal posto nel senso di Hadamard: piccole variazioni nei dati possono portare a grandi variazioni nel modello inferito. Per ottenere soluzioni stabili e significative, è necessario introdurre la regolarizzazione, cioè informazione a priori sul modello. Ad esempio, si può richiedere che il modello sia "liscio" in qualche senso, aggiungendo alla funzione obiettivo un termine di penalizzazione: $S_{reg}[v] = S[v] + \lambda\int(dv/dr)^2 dr$, dove λ è un parametro di regolarizzazione che controlla il compromesso tra aderenza ai dati e regolarità del modello.

La Struttura Sismica della Terra

L'applicazione sistematica dei metodi di inversione sismica ha permesso di determinare la struttura interna della Terra con notevole dettaglio. Il modello di riferimento è costituito da

sfere concentriche con proprietà che variano con il raggio, anche se sappiamo che esistono eterogeneità laterali significative.

La crosta terrestre è lo strato più esterno, con uno spessore che varia da circa cinque a dieci chilometri sotto gli oceani fino a trenta-settanta chilometri sotto i continenti. La velocità delle onde P nella crosta varia tipicamente da cinque a sette chilometri al secondo, mentre le onde S viaggiano a circa tre-quattro chilometri al secondo. Il confine inferiore della crosta è marcato dalla discontinuità di Mohorovičić (o Moho), dove si osserva un brusco aumento di velocità dovuto al cambiamento di composizione chimica tra la crosta (ricca di silicati di alluminio e calcio) e il mantello (dominato da silicati di magnesio e ferro).

Il mantello superiore si estende dalla Moho fino a una profondità di circa 660 chilometri. In questa regione, la velocità delle onde sismiche aumenta generalmente con la profondità, riflettendo l'aumento di pressione e i conseguenti cambiamenti nelle proprietà elastiche dei minerali. Una caratteristica importante è la zona a bassa velocità (low-velocity zone), situata tipicamente tra 80 e 200 chilometri di profondità sotto gli oceani, dove si osserva una leggera diminuzione della velocità delle onde S. Questa zona è probabilmente associata a fusione parziale o a una particolare configurazione dei minerali che rende il mantello meno rigido.

A 410 chilometri di profondità si osserva una discontinuità sismica importante, causata dalla trasformazione di fase dell'olivina dalla struttura α alla struttura β (struttura spinello). Questa transizione è associata a un aumento di densità del sei-otto per cento e a un corrispondente aumento di velocità sismica. A 660 chilometri si trova un'altra discontinuità ancora più marcata, causata dalla transizione dalla fase spinello alla fase post-spinello (struttura perovskite + magnesiowüstite). Questa discontinuità segna il confine tra mantello superiore e mantello inferiore.

Il mantello inferiore, che si estende da 660 a 2891 chilometri di profondità, è caratterizzato da un gradiente di velocità abbastanza regolare, senza discontinuità maggiori. Le velocità aumentano da circa 10,7 chilometri al secondo per le onde P e 5,9 chilometri al secondo per le onde S a 660 chilometri, fino a circa 13,7 chilometri al secondo e 7,3 chilometri al secondo alla base del mantello. Nella regione più profonda del mantello, negli ultimi duecento chilometri sopra il confine col nucleo, si osserva una regione con proprietà particolari chiamata strato D'', caratterizzata da forti eterogeneità laterali e possibilmente da anisotropia sismica.

Il confine mantello-nucleo a 2891 chilometri di profondità è la discontinuità più drammatica dell'interno terrestre. La velocità delle onde P diminuisce bruscamente da circa 13,7 a 8,1 chilometri al secondo, mentre le onde S non si propagano nel nucleo esterno. Questo è interpretato come evidenza che il nucleo esterno è liquido, composto principalmente di ferro con una piccola percentuale di elementi leggeri come zolfo, ossigeno o silicio. L'assenza di rigidità nel nucleo esterno è consistente con le proprietà di un metallo fuso ad alta temperatura e pressione.

Il nucleo interno, con un raggio di circa 1220 chilometri, è stato scoperto sismologicamente da Inge Lehmann nel 1936. In questa regione le onde P viaggiano a circa undici chilometri al secondo, e soprattutto riappaiono le onde S, indicando che il nucleo interno è solido nonostante l'alta temperatura. Questo è un esempio di solidificazione indotta dalla

pressione: l'enorme pressione al centro della Terra (circa 360 gigapascal) aumenta il punto di fusione del ferro al di sopra della temperatura effettiva, permettendo la cristallizzazione.

I Modi Normali della Terra

Oltre alla teoria dei raggi, che fornisce un'approssimazione geometrica valida per alte frequenze, esiste una descrizione alternativa della propagazione sismica basata sui modi normali. Questa descrizione è particolarmente utile per onde a bassa frequenza e per comprendere le oscillazioni globali della Terra.

Un modo normale è una configurazione di oscillazione della Terra in cui tutte le particelle oscillano con la stessa frequenza angolare ω. Matematicamente, i modi normali sono le autofunzioni dell'operatore elastodinamico. Se cerchiamo soluzioni dell'equazione del moto della forma $u(r,t) = u_0(r) \exp(-i\omega t)$, dove $u_0(r)$ è l'ampiezza spaziale, otteniamo un problema agli autovalori: $\rho\omega^2 u_0 = \nabla\cdot(C:\nabla u_0) + \rho g$, dove C è il tensore delle costanti elastiche.

Per una Terra sfericamente simmetrica, i modi normali possono essere classificati in due tipi principali: modi sferoidali, che coinvolgono sia movimento radiale che tangenziale, e modi toroidali, che coinvolgono solo movimento tangenziale (e quindi non producono variazioni di volume). I modi sferoidali sono ulteriormente denotati con $_nS_l$, dove n è il numero d'ordine radiale (numero di nodi nella direzione radiale) e l è il numero d'ordine angolare (grado dell'armonica sferica). I modi toroidali sono denotati $_nT_l$.

Il modo fondamentale di oscillazione della Terra è ${}_0S_2$, con un periodo di circa 53,8 minuti. In questo modo, la Terra si deforma alternativamente in una forma prolata lungo l'asse polare e in una forma oblata nell'equatore, senza nodi radiali. Altri modi importanti includono ${}_0S_3$ (periodo 43,5 minuti), ${}_0S_4$ (periodo 36,2 minuti), e così via. I modi toroidali fondamentali hanno periodi simili: ${}_0T_2$ ha un periodo di 44,3 minuti.

Lo spettro completo dei modi normali contiene informazioni dettagliate sulla struttura interna della Terra. La frequenza di ciascun modo dipende dalla distribuzione di densità e dalle costanti elastiche in tutto il volume terrestre. Misurando le frequenze di molti modi e invertendo questi dati, si può costruire un modello della Terra con una risoluzione complementare a quella ottenuta dai tempi di percorrenza dei raggi.

Un grande terremoto eccita migliaia di modi normali simultaneamente. Il segnale sismico registrato è la sovrapposizione di tutte queste oscillazioni: $u(t) = \Sigma A_k \exp(-i\omega_k t - \gamma_k t)$, dove la somma è su tutti i modi, A_k è l'ampiezza di eccitazione del modo k, ω_k è la sua frequenza angolare, e γ_k è il suo coefficiente di smorzamento (che tiene conto della dissipazione anelastica). Utilizzando la trasformata di Fourier, possiamo separare i diversi modi e misurare le loro frequenze con grande precisione.

Lo smorzamento dei modi normali fornisce informazioni cruciali sull'anelasticità della Terra. Mentre la teoria elastica perfetta predice che i modi continuerebbero a oscillare indefinitamente, in realtà ogni modo decade esponenzialmente con il tempo a causa della dissipazione interna. Il fattore di qualità Q di un modo è definito come $Q = \omega/(2\gamma)$, e misura quante oscillazioni avvengono prima che l'ampiezza diminuisca di un fattore e. Per la Terra, i

valori tipici di Q sono dell'ordine di qualche centinaio, indicando che la dissipazione, sebbene presente, è relativamente piccola.

La Tomografia Sismica

La tomografia sismica è una tecnica potente che permette di determinare la struttura tridimensionale della velocità sismica all'interno della Terra, andando oltre i modelli sfericamente simmetrici. Il principio è analogo alla tomografia computerizzata (CT) usata in medicina: si utilizzano le misure dei tempi di percorrenza di onde che attraversano la Terra lungo molti percorsi diversi per ricostruire la distribuzione spaziale della velocità.

Il problema è formulato come segue. Supponiamo di avere un modello di riferimento con velocità $v_0(r)$, e che la velocità reale sia $v(r) = v_0(r) + \delta v(r)$, dove δv è una piccola perturbazione. Il tempo di percorrenza lungo un raggio è approssimativamente $\tau \approx \tau_0 + \delta\tau$, dove τ_0 è il tempo nel modello di riferimento e $\delta\tau = -\int(\delta v/v_0^2)\, ds$ è la perturbazione del tempo dovuta alla perturbazione di velocità.

Discretizzando la Terra in piccoli volumi (voxel) e assumendo che δv sia costante in ciascun voxel, otteniamo una relazione lineare: $\delta\tau_i = \Sigma_j A_{ij} \delta v_j$, dove i indica l'osservazione (raggio), j indica il voxel, e A_{ij} è la lunghezza del percorso del raggio i attraverso il voxel j divisa per v_0^2 in quel voxel. Questa è un sistema di equazioni lineari che può essere risolto per δv_j dato $\delta\tau_i$.

Il problema principale è che il sistema è tipicamente sottodeterminato (ci sono più incognite che equazioni) e mal condizionato (piccoli errori nei dati possono portare a grandi errori nella soluzione). Per ottenere soluzioni significative, si utilizzano tecniche di inversione regolarizzata. Un approccio comune è il metodo LSQR (Least Squares QR), che combina efficienza computazionale con capacità di gestire sistemi molto grandi.

I risultati della tomografia sismica hanno rivelato una struttura tridimensionale estremamente complessa dell'interno terrestre. Nel mantello, si osservano grandi eterogeneità di velocità che sono correlate con la tettonica delle placche. Le zone di subduzione, dove le placche oceaniche fredde affondano nel mantello, appaiono come regioni ad alta velocità che si estendono fino a grandi profondità. I pennacchi del mantello, colonne di materiale caldo che salgono dalle profondità, appaiono come regioni a bassa velocità.

Nella parte più profonda del mantello, alla base dello strato D'', la tomografia ha rivelato l'esistenza di due grandi province a bassissima velocità sismica sotto l'Africa e sotto il Pacifico. Queste strutture, chiamate LLSVPs (Large Low Shear Velocity Provinces), si estendono lateralmente per migliaia di chilometri e verticalmente per centinaia di chilometri. La loro origine e composizione sono ancora oggetto di dibattito: potrebbero essere accumuli di materiale chimicamente distinto, zone parzialmente fuse, o regioni con una particolare struttura mineralogica.

La Sismicità e la Dinamica delle Faglie

I terremoti sono manifestazioni della dinamica della litosfera terrestre, il guscio rigido esterno composto dalla crosta e dalla parte superiore del mantello. La stragrande maggioranza dei

terremoti è causata dal rilascio improvviso di energia elastica accumulata lungo faglie, superfici di discontinuità dove blocchi di roccia scorrono l'uno rispetto all'altro.

La teoria della dislocazione fornisce il quadro matematico per descrivere i terremoti. Una dislocazione è una discontinuità nel campo di spostamento attraverso una superficie. Se Σ è la superficie di faglia e u^+ e u^- sono gli spostamenti sui due lati della faglia, il vettore di dislocazione è $D = u^+ - u^-$. Il campo di spostamento $u(x)$ prodotto da una dislocazione su una superficie Σ in un mezzo elastico può essere calcolato mediante l'integrale: $u_i(x) = \int\int_\Sigma c_{ijkl} n_l G_{jk}(x,\xi) D_k(\xi) dS(\xi)$, dove c_{ijkl} è il tensore delle costanti elastiche, n_l è la normale alla superficie di faglia, G_{jk} è il tensore di Green (la soluzione fondamentale dell'equazione elastica), e ξ varia sulla superficie della faglia.

Per una faglia puntiforme in un mezzo omogeneo e infinito, il tensore di Green ha la forma esplicita: $G_{ij}(x,\xi) = (1/(4\pi\mu r))[(3-\alpha^2/\beta^2)\delta_{ij} + (\alpha^2/\beta^2-1)r_i r_j/r^2]$, dove $r = |x-\xi|$ è la distanza dalla sorgente. Questa soluzione mostra che il campo lontano (a grande distanza dalla faglia) ha una dipendenza $1/r$, caratteristica delle onde di volume.

Il tensore momento sismico M_{ij} fornisce una rappresentazione compatta della sorgente sismica. Per una faglia piana con area A, normale n e vettore di scorrimento s (direzione del movimento relativo), il tensore momento è: $M_{ij} = \mu A D (n_i s_j + n_j s_i)/2$, dove μ è il modulo di taglio e D è l'ampiezza della dislocazione. Il momento scalare $M_0 = \mu A D$ è una misura dell'intensità del terremoto ed è la base per la scala di magnitudo momento $M_w = (2/3) \log_{10}(M_0) - 6{,}07$, dove M_0 è espresso in newton-metri.

La dinamica della rottura di una faglia è descritta da equazioni che accoppiano l'elastodinamica del mezzo circostante con le condizioni di attrito sulla superficie di faglia. Il modello più semplice è l'attrito di Coulomb, secondo cui lo sforzo di taglio τ necessario per far scivolare la faglia è proporzionale allo sforzo normale σ_n: $\tau = \mu_s \sigma_n$, dove μ_s è il coefficiente di attrito statico. Una volta iniziato lo scorrimento, l'attrito dinamico può essere più basso: $\tau = \mu_d \sigma_n$, con $\mu_d < \mu_s$.

Modelli più realistici includono dipendenze dell'attrito dalla velocità di scorrimento e dalla storia dello scorrimento. La legge di attrito rate-and-state, ampiamente utilizzata in sismologia, ha la forma: $\tau = (\mu_0 + a \ln(V/V_0) + b \ln(\theta V_0/D_c)) \sigma_n$, dove V è la velocità di scorrimento, θ è una variabile di stato che evolve secondo un'equazione differenziale, e a, b, D_c sono parametri del materiale. Questa legge permette di descrivere fenomeni complessi come lo scorrimento stabile, lo scorrimento instabile (terremoti), e il comportamento premonitorio.

La sequenza temporale dei terremoti in una data regione mostra caratteristiche statistiche notevoli. La legge di Gutenberg-Richter afferma che il numero di terremoti con magnitudo maggiore di M segue una relazione del tipo $\log_{10}(N(M)) = a - b M$, dove a e b sono costanti (tipicamente $b \approx 1$). Questa legge implica che ci sono molti terremoti piccoli e pochi terremoti grandi, con una distribuzione che segue una legge di potenza.

La legge di Omori descrive la frequenza delle repliche dopo un terremoto principale: $n(t) = K/(c+t)^p$, dove $n(t)$ è il numero di repliche per unità di tempo al tempo t dopo il terremoto principale, e K, c, p sono parametri (tipicamente $p \approx 1$). Questa legge mostra che le repliche

sono molto frequenti immediatamente dopo il terremoto principale e decadono gradualmente nel tempo secondo una legge di potenza.

Geomagnetismo, Geodinamica e Tettonica delle Placche

Le Equazioni dell'Elettromagnetismo e il Campo Magnetico Terrestre

Il campo magnetico terrestre è una delle caratteristiche più notevoli del nostro pianeta, fornendo protezione dalle particelle cariche del vento solare e permettendo la navigazione mediante bussola. La comprensione matematica di questo campo richiede l'applicazione delle equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo in condizioni appropriate per l'interno della Terra.

Le equazioni di Maxwell in forma differenziale sono: $\nabla \cdot E = \rho/\varepsilon_0$, $\nabla \cdot B = 0$, $\nabla \times E = -\partial B/\partial t$, $\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \partial E/\partial t$, dove E è il campo elettrico, B è il campo magnetico, ρ è la densità di carica, J è la densità di corrente, ε_0 è la permittività del vuoto e μ_0 è la permeabilità del vuoto. Per fenomeni geomagnetici a bassa frequenza, il termine di corrente di spostamento $\mu_0\varepsilon_0 \partial E/\partial t$ è trascurabile (approssimazione quasi-statica), e le equazioni si semplificano.

Nell'approssimazione magnetoidrodinamica (MHD), che è appropriata per descrivere la dinamica del nucleo esterno liquido conduttore, il campo magnetico interagisce con il flusso del fluido attraverso l'equazione di induzione: $\partial B/\partial t = \nabla \times (v \times B) + \eta \nabla^2 B$, dove v è la velocità del fluido e $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$ è la diffusività magnetica, con σ conducibilità elettrica. Questa equazione esprime il fatto che il campo magnetico viene trasportato dal fluido (primo termine a destra, termine di advection) e diffonde per effetto della resistività finita del mezzo (secondo termine, termine di diffusione).

Il numero di Reynolds magnetico R_m = UL/η, dove U è una velocità caratteristica e L una lunghezza caratteristica, misura l'importanza relativa del termine di advection rispetto al termine di diffusione. Per il nucleo terrestre, con U ≈ 10^(-4) m/s (velocità tipica dei flussi nel nucleo), L ≈ 10^6 m (scala caratteristica), e η ≈ 2 m²/s, otteniamo R_m ≈ 50, indicando che l'advection domina sulla diffusione. Questo regime è chiamato regime di dinamo, ed è la condizione necessaria perché il campo magnetico possa essere generato e sostenuto dal moto del fluido conduttore.

Il teorema di Cowling afferma che non è possibile mantenere un campo magnetico assialmente simmetrico (dipendente solo da r e θ in coordinate sferiche, ma non da φ) mediante una dinamo. Questo risultato matematico, dimostrato rigorosamente, implica che il meccanismo di dinamo terrestre deve necessariamente coinvolgere componenti non assisimmetriche del flusso o del campo magnetico. In pratica, la dinamo terrestre è tridimensionale e turbolenta, con una struttura estremamente complessa.

Le equazioni complete che governano la dinamo terrestre accoppiano l'equazione di induzione magnetica con le equazioni di Navier-Stokes per il fluido, includendo la forza di Lorentz (J×B) che il campo magnetico esercita sul fluido conduttore. Queste equazioni, insieme alle condizioni al contorno appropriate e alle equazioni termodinamiche che

descrivono il trasporto di calore e la convezione, formano un sistema non lineare estremamente complesso. La soluzione numerica di queste equazioni, chiamata simulazione di geodinamo, è uno dei problemi computazionali più impegnativi della geofisica.

La Struttura del Campo Magnetico Terrestre

Il campo magnetico osservato sulla superficie terrestre può essere decomposto in contributi di diverse origini. Il campo principale, che rappresenta circa il novantacinque per cento del campo totale, è generato dalle correnti elettriche nel nucleo esterno liquido. Questo campo varia su scale temporali da anni a milioni di anni. Il campo crostale, prodotto dalla magnetizzazione permanente delle rocce nella crosta terrestre, contribuisce alcuni percento del campo totale e ha struttura spaziale fine. Il campo esterno, dovuto a correnti elettriche nella ionosfera e magnetosfera, varia rapidamente (da secondi a giorni) e contribuisce tipicamente meno dell'uno per cento.

Il campo principale può essere rappresentato come il gradiente di un potenziale scalare: B = -∇V, dove V soddisfa l'equazione di Laplace ∇²V = 0 nella regione esterna al nucleo dove non ci sono correnti. In coordinate sferiche, la soluzione generale è uno sviluppo in armoniche sferiche: V(r,θ,φ) = a Σ(n=1 a ∞) Σ(m=0 a n) (a/r)^(n+1) [g_n^m cos(mφ) + h_n^m sin(mφ)] P_n^m(cos θ), dove a è il raggio medio della Terra, g_n^m e h_n^m sono i coefficienti di Gauss, e P_n^m sono i polinomi di Legendre associati.

I coefficienti di Gauss sono determinati mediante l'analisi delle misure magnetiche effettuate sulla superficie terrestre e da satelliti. Il modello internazionale di riferimento del campo geomagnetico (IGRF, International Geomagnetic Reference Field) fornisce i valori di questi coefficienti aggiornati ogni cinque anni. Il coefficiente dominante è il dipolo assiale $g_1^0 \approx -29470$ nanotesla, che rappresenta un dipolo magnetico di momento circa 7,8 × 10^22 ampere-metri quadrati, inclinato di circa undici gradi rispetto all'asse di rotazione terrestre.

I termini di ordine superiore nello sviluppo in armoniche sferiche rappresentano deviazioni dalla simmetria dipolare. Il termine quadrupolare (n = 2) è circa il dieci per cento del termine dipolare, e i termini di ordine ancora superiore decrescono rapidamente. Questa struttura riflette il fatto che le sorgenti del campo (le correnti nel nucleo) sono relativamente lontane dalla superficie di osservazione, e i dettagli fini del campo sorgente sono attenuati dalla distanza.

Una caratteristica notevole del campo geomagnetico è la sua variazione secolare, cioè il cambiamento nel tempo dei coefficienti di Gauss. L'intensità del momento dipolare sta diminuendo a un tasso di circa il cinque per cento per secolo. La posizione dei poli magnetici (i punti dove il campo è verticale) sta migrando: il polo nord magnetico si sta attualmente muovendo dalla regione artica canadese verso la Siberia a una velocità di circa cinquanta chilometri per anno.

Il fenomeno più drammatico della variazione secolare è l'inversione geomagnetica, durante la quale la polarità del campo si inverte completamente (il polo nord diventa polo sud e viceversa). La registrazione paleomagnetica nelle rocce mostra che tali inversioni sono avvenute centinaia di volte nella storia geologica, con una frequenza media di alcune inversioni per milione di anni. L'ultima inversione, chiamata inversione di

Brunhes-Matuyama, è avvenuta circa 780000 anni fa. Il processo di inversione sembra richiedere da mille a diecimila anni.

La Teoria della Dinamo Terrestre

La comprensione di come il moto del fluido nel nucleo esterno possa generare e mantenere il campo magnetico terrestre è uno dei grandi successi della geofisica matematica moderna. Il problema della dinamo auto-eccitata è fondamentalmente un problema di stabilità e biforcazione per un sistema accoppiato di equazioni non lineari.

Il teorema antidinam di Cowling, già menzionato, pone vincoli severi sui tipi di flusso che possono mantenere un campo magnetico. Un altro risultato fondamentale è il teorema di Braginsky, che mostra che una dinamo α^2 (dove il termine α rappresenta l'effetto di elicità del flusso turbolento su piccola scala) può mantenere un campo magnetico se il numero di Reynolds magnetico basato sulla turbolenza su piccola scala supera un valore critico dell'ordine di dieci.

Il meccanismo di dinamo più comunemente invocato per la Terra è la dinamo α-ω, in cui il flusso differenziale rotante (effetto ω) genera campo toroidale da campo poloidale, mentre l'elicità del flusso convettivo (effetto α) rigenera campo poloidale da campo toroidale, chiudendo il ciclo. Matematicamente, questo può essere rappresentato schematicamente dalle equazioni: $\partial B_p/\partial t \approx \alpha B_t + \eta \nabla^2 B_p$, $\partial B_t/\partial t \approx \omega \partial B_p/\partial \theta + \eta \nabla^2 B_t$, dove B_p è la componente poloidale e B_t è la componente toroidale del campo.

Le simulazioni numeriche moderne della dinamo terrestre risolvono le equazioni MHD complete in geometria sferica tridimensionale. Questi calcoli richiedono risorse computazionali enormi perché devono risolvere simultaneamente la dinamica del fluido turbolento, l'induzione magnetica e il trasporto di calore su una vasta gamma di scale spaziali e temporali. Nonostante queste difficoltà, le simulazioni sono riuscite a riprodurre molte caratteristiche del campo geomagnetico osservato, inclusa la struttura dipolare dominante, la variazione secolare, e persino le inversioni geomagnetiche.

Un risultato notevole delle simulazioni è che il campo magnetico nel nucleo ha una struttura molto più complessa di quanto appaia sulla superficie terrestre. Mentre il campo osservato in superficie è dominato dal dipolo assiale, il campo nel nucleo contiene componenti non dipolari significative e fluttuazioni temporali rapide. Questa complessità è filtrata dall'integrazione lungo il raggio nel calcolo del potenziale in superficie, lasciando visibile principalmente la componente di scala più grande.

La Convezione nel Mantello e la Dinamica delle Placche

Il mantello terrestre, sebbene sia solido su scale temporali brevi, si comporta come un fluido viscoso su scale temporali geologiche (milioni di anni). La convezione nel mantello, guidata dal trasferimento di calore dall'interno caldo verso la superficie più fredda, è il motore fondamentale della tettonica delle placche e di molti altri processi geodinamici.

Le equazioni che governano la convezione mantellica sono le equazioni di Stokes (limite di numero di Reynolds nullo delle equazioni di Navier-Stokes) accoppiate con l'equazione del trasporto di calore. In approssimazione di Boussinesq, dove si assume che la densità vari

solo per effetto della temperatura (trascurando la compressibilità), le equazioni sono: $0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 v + \rho_0(1 - \alpha T)g$, $\nabla \cdot v = 0$, $\partial T/\partial t + v \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + Q/\rho_0 c_p$, dove p è la pressione, η è la viscosità, ρ_0 è la densità di riferimento, α è il coefficiente di espansione termica, T è la temperatura, κ è la diffusività termica, Q rappresenta le sorgenti interne di calore (principalmente decadimento radioattivo), e c_p è il calore specifico a pressione costante.

Il numero di Rayleigh $Ra = (\rho_0 g \alpha \Delta T h^3)/(\eta \kappa)$ è il parametro adimensionale fondamentale che controlla la convezione, dove ΔT è il salto di temperatura attraverso lo strato di spessore h. Quando Ra supera un valore critico Ra_c (dell'ordine di mille per condizioni al contorno tipiche), la conduzione pura diventa instabile e si instaura la convezione. Per il mantello terrestre, con $\Delta T \approx 2500$ K, $h \approx 2900$ km, $\eta \approx 10^{21}$ Pa·s, $\kappa \approx 10^{-6}$ m²/s, $\alpha \approx 3 \times 10^{-5}$ K^{-1}, otteniamo $Ra \approx 10^7$, indicando che la convezione è estremamente sovracritica.

In regime fortemente sovracritico, la convezione assume una struttura complessa con strati limite termici sottili vicino alle superfici superiore e inferiore, e un interior ben mescolato con temperatura quasi uniforme. Il flusso di calore q attraverso lo strato è proporzionale a una potenza del numero di Rayleigh: $Nu = q/(\kappa \Delta T/h) \sim Ra^{\beta}$, dove Nu è il numero di Nusselt e β è un esponente che dipende dalla geometria e dalle condizioni al contorno (tipicamente $\beta \approx 1/3$ per convezione 3D).

La viscosità del mantello non è costante, ma dipende fortemente dalla temperatura e dalla pressione. Una dipendenza comune utilizzata nei modelli è $\eta = \eta_0 \exp(E_a/(RT))$, dove E_a è l'energia di attivazione (dell'ordine di 300-500 kilojoule per mole per il mantello superiore). Questa dipendenza esponenziale implica che il mantello freddo vicino alla superficie è molto più viscoso (di ordini di grandezza) del mantello caldo profondo. Questa stratificazione reologica ha conseguenze profonde per la struttura della convezione.

Nella teoria classica della tettonica delle placche, la litosfera (la parte rigida e fredda del mantello superiore insieme alla crosta) è suddivisa in un mosaico di placche che si muovono relativamente le une alle altre. I margini delle placche sono di tre tipi: divergenti (dorsali oceaniche, dove si crea nuova litosfera), convergenti (zone di subduzione, dove la litosfera oceanica affonda nel mantello), e trasformi (dove le placche scorrono lateralmente). Questa descrizione cinematica è supportata da abbondanti osservazioni geodetiche, sismiche e paleomagnetiche.

Il problema fondamentale della geodinamica è collegare questa descrizione cinematica superficiale con la dinamica profonda della convezione mantellica. Si ritiene che le placche litosferiche siano la parte superiore fredda e rigida delle celle convettive nel mantello. Le placche in subduzione, essendo fredde e dense, forniscono la principale forza motrice ("slab pull") che guida il moto delle placche. La spinta dalla dorsale ("ridge push") e la resistenza viscosa alla base della placca forniscono contributi aggiuntivi al bilancio delle forze.

I Modelli Matematici della Tettonica delle Placche

La formulazione matematica rigorosa della cinematica delle placche su una sfera è stata sviluppata negli anni sessanta da Jason Morgan e altri. Il teorema fondamentale è il teorema di rotazione di Eulero: il moto relativo di due placche rigide su una sfera può sempre essere descritto come una rotazione attorno a un polo di rotazione (polo euleriano). Se definiamo un sistema di coordinate con asse z passante per il polo di rotazione, la velocità di un punto

sulla placca a latitudine θ è v = Ω R sin θ, dove Ω è la velocità angolare di rotazione e R è il raggio della Terra.

Conoscendo i poli euleriani e le velocità angolari per tutte le coppie di placche, possiamo costruire un modello cinematico globale autoconsistente. I dati principali vengono dalle velocità di apertura delle dorsali (misurate mediante anomalie magnetiche del fondo oceanico), dalle direzioni di scorrimento lungo faglie trasformi, e da misure geodetiche dirette (GPS, VLBI). Il modello di riferimento attuale, chiamato MORVEL (Mid-Ocean Ridge VELocity), fornisce le velocità relative di tutte le principali placche con precisioni dell'ordine di pochi millimetri per anno.

Un aspetto matematico interessante è che il sistema di velocità relative delle placche è sovradeterminato (ci sono più osservazioni che gradi di libertà) e deve soddisfare vincoli di chiusura. Ad esempio, se abbiamo tre placche A, B, C, le velocità relative devono soddisfare Ω_AB + Ω_BC + Ω_CA = 0. L'inversione dei dati per determinare i parametri del modello è quindi un problema di ottimizzazione vincolata.

La deformazione all'interno delle placche è generalmente piccola e può essere trascurata in prima approssimazione, ma in certe regioni (come il Tibet, l'Anatolia, o la Basin and Range negli Stati Uniti) la deformazione interna è significativa. In questi casi, è necessario abbandonare il modello di placche rigide e utilizzare un modello di continuo deformabile. Il tensore del tasso di deformazione ε̇_ij = (1/2)(∂v_i/∂x_j + ∂v_j/∂x_i) può essere stimato da dati GPS, e rivela pattern complessi di deformazione che riflettono la reologia della litosfera e le forze tettoniche applicate.

La Gravimetria e l'Isostasia

Le misure del campo gravitazionale terrestre forniscono informazioni cruciali sulla distribuzione della massa all'interno della Terra e sui processi geodinamici. Le anomalie gravitazionali, definite come deviazioni dal campo gravitazionale di riferimento (tipicamente un ellissoide di rotazione), riflettono eterogeneità di densità nella crosta e nel mantello.

L'anomalia di gravità di Bouguer è definita come g_B = g_oss - g_0 + δg_FA - δg_B, dove g_oss è la gravità osservata, g_0 è la gravità di riferimento (ellissoide), δg_FA è la correzione di aria libera (che tiene conto dell'elevazione del punto di misura), e δg_B è la correzione di Bouguer (che tiene conto della massa topografica tra il punto di misura e il livello del mare). Matematicamente, δg_FA = -0,3086 h milligal/metro (con h in metri), e δg_B = 2πGρh = 0,04192 ρ h milligal (con ρ in grammi per centimetro cubo).

Il concetto di isostasia è fondamentale per interpretare le anomalie gravitazionali. L'isostasia postula che la litosfera "galleggi" in equilibrio idrostatico sull'astenosfera sottostante, più densa e fluida. Secondo il modello di Airy, le variazioni topografiche sono compensate da variazioni dello spessore crostale: regioni elevate (come le montagne) hanno "radici" crostali che si estendono profondamente nel mantello, mentre bacini oceanici hanno crosta sottile. Secondo il modello di Pratt, le variazioni topografiche sono compensate da variazioni laterali di densità a profondità costante.

Matematicamente, l'equilibrio isostatico può essere espresso dalla condizione che la pressione a una profondità di compensazione sia costante lateralmente. Per il modello di

Airy, se h è l'elevazione topografica, ρ_c la densità crostale, ρ_m la densità del mantello, e t_0 lo spessore normale della crosta, lo spessore crostale sotto una regione elevata è t = t_0 + h(ρ_m/(ρ_m - ρ_c)). Con valori tipici ρ_c = 2700 kg/m³ e ρ_m = 3300 kg/m³, otteniamo t ≈ t_0 + 5,5h, mostrando che le radici crostali sono circa cinque volte più profonde dell'elevazione topografica.

Le anomalie gravitazionali osservate spesso deviano dall'equilibrio isostatico, indicando che la litosfera può sostenere sforzi per periodi geologicamente significativi. La rigidità flessurale della litosfera è quantificata dalla costante flessurale D = ET_e³/(12(1-v²)), dove E è il modulo di Young, T_e è lo spessore elastico effettivo, e v è il rapporto di Poisson. Misure di D da flessure litosferiche (come quelle associate al carico di isole vulcaniche o a catene montuose) danno valori di T_e che variano da pochi chilometri per litosfera giovane e calda a cinquanta-cento chilometri per litosfera vecchia e fredda.

Il Calore Interno della Terra e la Geotermica

Il flusso di calore dalla Terra verso lo spazio è uno degli osservabili fondamentali che vincolano i modelli della struttura e dell'evoluzione termica del pianeta. Il flusso di calore superficiale medio è di circa ottantasette milliwatt per metro quadrato, corrispondente a una perdita totale di circa quarantaquattro terawatt. Questa energia proviene da due sorgenti principali: il calore primordiale residuo dall'accrezione del pianeta, e il calore prodotto dal decadimento radioattivo degli elementi a lunga vita come uranio, torio e potassio.

L'equazione del trasporto di calore in forma generale è: ρc_p ∂T/∂t = ∇·(k∇T) + Q, dove k è la conducibilità termica e Q è la generazione interna di calore. Per la crosta continentale, Q è significativo (tipicamente due-tre microwatt per metro cubo) a causa della concentrazione di elementi radioattivi nelle rocce acide. Per il mantello, Q è molto più piccolo (circa due nanowatt per metro cubo).

In regime stazionario (∂T/∂t = 0) e con conducibilità costante, l'equazione si riduce a ∇²T = -Q/k. Per uno strato semi-infinito con produzione di calore costante e temperatura superficiale T_0, la soluzione è: T(z) = T_0 + q_m z/k - (Qz²)/(2k), dove q_m è il flusso mantellico alla base della crosta. Il flusso superficiale è q_s = q_m + Q·h, dove h è lo spessore dello strato radiogenico. Questa relazione lineare tra flusso superficiale e produzione di calore è osservata empiricamente in molte province continentali.

Il profilo di temperatura all'interno della Terra è controllato da un delicato bilancio tra conduzione, convezione e generazione radiogenica. Nella litosfera, il trasporto è principalmente per conduzione, e il gradiente geotermico è dell'ordine di venti-trenta kelvin per chilometro. Nell'astenosfera e nel mantello convettivo, il profilo è vicino all'adiabatica, con gradiente di circa 0,3-0,5 kelvin per chilometro. Nel nucleo esterno, anch'esso convettivo, il gradiente è superadiabatico nella parte superiore (per guidare la convezione) e vicino all'adiabatico nella parte inferiore.

L'evoluzione termica della Terra su scale temporali geologiche è descritta da un bilancio energetico globale. La variazione dell'energia interna è bilanciata dalla perdita di calore superficiale e dalla produzione radiogenica: d(E)/dt = -Q_surf + Q_rad, dove E è l'energia interna totale, Q_surf è il flusso superficiale totale, e Q_rad è la potenza totale da decadimento radioattivo. Modelli parametrizzati della convezione, che esprimono Q_surf

come funzione della temperatura media del mantello e dello spessore della litosfera, permettono di integrare questa equazione all'indietro nel tempo e ricostruire l'evoluzione termica.

I risultati di tali modelli suggeriscono che la Terra era molto più calda nel passato geologico. Il flusso di calore superficiale quattro miliardi di anni fa era probabilmente tre-quattro volte più alto dell'attuale. Questo ha profonde implicazioni per lo stile della tettonica: alcuni ricercatori propongono che la tettonica delle placche nel senso moderno potrebbe non essere operata nell'Archeano (prima di 2,5 miliardi di anni fa), quando la Terra era troppo calda per permettere la formazione di placche litosferiche rigide.

Geofisica Applicata, Metodi di Esplorazione e Teoria Inversa

I Metodi Sismici di Esplorazione

I metodi sismici sono gli strumenti più potenti per esplorare la struttura del sottosuolo a profondità che vanno da pochi metri a diversi chilometri. La sismica a riflessione, in particolare, è la tecnica fondamentale utilizzata nell'esplorazione petrolifera e del gas naturale, permettendo di creare immagini dettagliate delle strutture geologiche sepolte.

Il principio base della sismica a riflessione è semplice: si genera un'onda sismica in superficie (mediante esplosivi, vibratori o altre sorgenti), e si registrano le onde riflesse da discontinuità nel sottosuolo utilizzando una serie di ricevitori (geofoni o idrofoni). Il tempo di percorrenza dell'onda dalla sorgente al riflettore e poi al ricevitore fornisce informazioni sulla profondità del riflettore, mentre l'ampiezza e la forma del segnale riflesso forniscono informazioni sulle proprietà elastiche delle rocce.

Per un riflettore orizzontale a profondità z, con velocità costante v nel mezzo sovrastante, il tempo di riflessione a offset (distanza orizzontale sorgente-ricevitore) x è dato dall'equazione dell'iperbole: $t(x) = \sqrt{(t_0^2 + x^2/v^2)}$, dove $t_0 = 2z/v$ è il tempo di riflessione a offset zero (tempo di andata e ritorno verticale). Questa relazione iperbolica è fondamentale: registrando il tempo di arrivo a diversi offset, possiamo determinare sia t_0 che v mediante un'analisi di velocità.

Il processo di elaborazione dei dati sismici a riflessione è complesso e coinvolge molte fasi. La prima fase è il preprocessing, che include la rimozione del rumore, l'applicazione di filtri, e correzioni per effetti strumentali. La fase successiva è l'analisi di velocità, dove si determina il campo di velocità nel sottosuolo. Poi viene la correzione di normal moveout (NMO), che corregge l'effetto dell'offset riducendo le riflessioni iperboliche a riflessioni orizzontali, permettendo lo stacking (somma) di tracce corrispondenti allo stesso punto medio comune (CMP, Common Mid Point).

La fase finale e più critica è la migrazione sismica, che sposta gli eventi riflessi dalla loro posizione apparente nel tempo alla loro vera posizione spaziale. La migrazione è necessaria perché le riflessioni da riflettori inclinati o curvi appaiono nelle sezioni sismiche non migrate in posizioni errate. Matematicamente, la migrazione può essere vista come una soluzione

del problema inverso della propagazione delle onde: dato il campo d'onda osservato in superficie, ricostruire la distribuzione dei riflettori nel sottosuolo.

Un approccio teorico alla migrazione si basa sull'equazione d'onda scalare: $(1/v^2)\,\partial^2 p/\partial t^2 = \nabla^2 p$, dove p è la pressione acustica (o il potenziale dello spostamento). La soluzione di questa equazione può essere scritta formalmente utilizzando la funzione di Green: $p(x,t) = \iiint G(x,x',t-t')\, f(x',t')\, dx'dt'$, dove f è la sorgente e G è la funzione di Green. La migrazione inverte questa relazione, determinando la funzione riflettività r(x') dai dati osservati p(x,t).

L'equazione della migrazione in approssimazione di Kirchhoff è: $r(x') = \int\int p(x,t = \tau(x,x'))\, dx$, dove l'integrale è su tutte le posizioni dei ricevitori x, e $\tau(x,x')$ è il tempo di percorrenza da x' a x. Questa equazione rappresenta una diffraction stack: per ogni punto nel sottosuolo x', si sommano le ampiezze osservate lungo la curva di diffrazione nel dominio dei dati. In pratica, l'integrazione è sostituita da una somma discreta su tutte le tracce sismiche.

Metodi di migrazione più sofisticati si basano sulla continuazione verso il basso del campo d'onda (downward continuation). L'idea è di "propagare" numericamente il campo d'onda osservato in superficie verso profondità crescenti, utilizzando l'equazione d'onda con condizioni iniziali date dai dati osservati. All'istante t = 0 del tempo di propagazione verso il basso, il campo d'onda collassa sui riflettori, fornendo un'immagine della struttura del sottosuolo. Questo approccio, chiamato migrazione nel dominio della profondità, è particolarmente efficace per geometrie complesse e variazioni laterali di velocità.

I Metodi Elettromagnetici in Geofisica

I metodi elettromagnetici (EM) sfruttano la propagazione e la diffusione di campi elettromagnetici nel sottosuolo per determinare la distribuzione della conducibilità elettrica (o resistività, il suo reciproco). Questi metodi sono particolarmente sensibili alla presenza di fluidi conduttivi (acqua salata, idrocarburi con acqua di formazione) e sono quindi ampiamente utilizzati in esplorazione geotermica, ricerca di risorse minerali, e monitoraggio ambientale.

Il comportamento dei campi EM nel sottosuolo è governato dalle equazioni di Maxwell. In forma differenziale nel dominio della frequenza (assumendo dipendenza armonica $\exp(-i\omega t)$), le equazioni rilevanti sono: $\nabla \times E = i\omega\mu H$, $\nabla \times H = (\sigma - i\omega\varepsilon)E$, dove E e H sono i campi elettrico e magnetico complessi, σ è la conducibilità, μ è la permeabilità magnetica, ed ε è la permittività dielettrica. Per frequenze tipicamente utilizzate in geofisica (da frazioni di hertz a migliaia di hertz), il termine di corrente di conduzione σE domina sul termine di corrente di spostamento $i\omega\varepsilon E$, permettendo di trascurare quest'ultimo (approssimazione quasi-statica).

Combinando le due equazioni di Maxwell, otteniamo l'equazione di Helmholtz per il campo elettrico: $\nabla^2 E + k^2 E = 0$, dove $k^2 = -i\omega\mu\sigma$ è il numero d'onda complesso. In un mezzo omogeneo, la soluzione descrive onde che decadono esponenzialmente con la distanza, con distanza di penetrazione (skin depth) $\delta = \sqrt{(2/(\omega\mu\sigma))}$. Per esempio, in un mezzo con σ = 0,01 siemens/metro (resistività 100 ohm-metro) a frequenza f = 1 hertz, $\delta \approx 500$ metri. Questo mostra che frequenze più basse penetrano più profondamente, ma forniscono risoluzione spaziale inferiore.

Il metodo magnetotellurico (MT) utilizza le variazioni naturali del campo elettromagnetico terrestre (causate da tempeste magnetiche e fulmini) come sorgente. Misurando simultaneamente le componenti orizzontali del campo elettrico e magnetico in superficie, si può determinare il tensore di impedenza Z, definito da $E_x = Z_{xx} H_x + Z_{xy} H_y$ e $E_y = Z_{yx} H_x + Z_{yy} H_y$. Per una Terra unidimensionale (proprietà che variano solo con la profondità), $Z_{xx} = Z_{yy} = 0$ e $Z_{xy} = -Z_{yx}$. La resistività apparente è definita come $\rho_a = (1/(\omega\mu))|Z_{xy}|^2$, e varia con la frequenza in modo che dipende dalla struttura di resistività in profondità.

L'inversione dei dati MT per ottenere il profilo di resistività è un problema inverso non lineare. Per un modello unidimensionale, si cerca una funzione $\rho(z)$ che minimizzi la differenza tra le resistività apparenti osservate e quelle calcolate. Il problema è mal posto e richiede regolarizzazione. Un approccio comune è la regolarizzazione di Occam, che cerca il modello "più liscio" (nel senso di minima rugosità) che si adatta ai dati entro il loro errore sperimentale. Matematicamente, si minimizza il funzionale: $\Phi = (d - F(m))^T C_d^{-1} (d - F(m)) + \lambda m^T L^T L m$, dove d sono i dati, $F(m)$ è l'operatore forward per il modello m, C_d è la matrice di covarianza dei dati, L è un operatore di rugosità (tipicamente una approssimazione discreta della derivata seconda), e λ è il parametro di regolarizzazione.

Il metodo elettromagnetico transiente (TEM o TDEM) utilizza una sorgente controllata: una corrente che circola in un loop conduttore viene bruscamente interrotta, e si misura il campo magnetico indotto che decade nel tempo. La forma del decadimento dipende dalla distribuzione di conducibilità nel sottosuolo. Per un semispazio omogeneo di resistività ρ, la tensione indotta in un loop ricevitore al centro di un loop trasmettitore di raggio a decade approssimativamente come: $V(t) \propto a^5/(\rho^2 t^{(5/2)})$, per tempi sufficientemente lunghi (late-time approximation). Tempi di decadimento brevi sondano profondità minori, mentre tempi lunghi sondano maggiori profondità.

I Metodi Gravimetrici e Magnetometrici

Le misure di gravità e del campo magnetico forniscono informazioni complementari sulla distribuzione della densità e della suscettività magnetica nel sottosuolo. Questi metodi potenziali sono particolarmente utili per studi regionali e per identificare grandi strutture geologiche come intrusioni ignee, bacini sedimentari, e corpi mineralizzati.

L'anomalia gravitazionale prodotta da un corpo sepolto di forma arbitraria può essere calcolata integrando il contributo di ogni elemento di volume: $\Delta g(x,y) = G \iiint \Delta\rho(x',y',z') z/(((x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2)^{(3/2)}) dx'dy'dz'$, dove $\Delta\rho$ è il contrasto di densità rispetto al mezzo circostante e z è preso positivo verso il basso. Questa è l'equazione del problema diretto della gravimetria.

Per corpi semplici, l'integrale può essere valutato analiticamente. Ad esempio, per una sfera di raggio R, contrasto di densità $\Delta\rho$, sepolta a profondità d, l'anomalia verticale di gravità nel punto direttamente sopra il centro è: $\Delta g = (4\pi/3) G R^3 \Delta\rho / d^2$. Questa formula mostra che l'anomalia decade come $1/d^2$, e che è proporzionale alla massa anomala $M = (4\pi/3)R^3\Delta\rho$. Un risultato fondamentale è che la gravità non può distinguere tra diverse distribuzioni di massa che hanno lo stesso momento di monopolo: una sfera e qualsiasi altra forma con la stessa massa totale alla stessa profondità producono la stessa anomalia a grande distanza.

L'anomalia magnetica è più complessa perché dipende non solo dalla distribuzione della suscettività magnetica, ma anche dalla direzione del campo magnetico ambientale (che varia con la latitudine). Per un corpo con magnetizzazione uniforme M, l'anomalia del campo totale nella direzione del campo ambientale F_0 è approssimativamente: $\Delta F \approx (F_0 \cdot \nabla)\,\Phi$, dove Φ è il potenziale magnetico scalare dato da: $\Phi(x,y,z) = (1/4\pi) \iiint M \cdot \nabla'(1/r)\, dV = -(1/4\pi) \iiint \nabla' \cdot M / r\, dV$, dove $r = |x - x'|$ è la distanza dal punto di osservazione all'elemento di volume dV.

Il problema inverso in metodi potenziali (determinare la distribuzione di densità o magnetizzazione dai dati di campo) è fortemente non unico. Questo è espresso matematicamente dal fatto che distribuzioni di massa (o magnetizzazione) differenti possono produrre la stessa anomalia osservata. Un risultato classico è che se g(x,y) è una anomalia gravitazionale osservata a quota z = 0, allora la distribuzione di densità $\rho(x,y,z) = (1/2\pi G)\, \partial g/\partial x\, \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$, dove δ è la funzione delta di Dirac, produce esattamente la stessa anomalia. Questo mostra che sorgenti estremamente concentrate (tipo lamine) possono replicare anomalie prodotte da sorgenti distribuite.

Per ottenere soluzioni significative del problema inverso, è necessario incorporare informazione a priori. Un approccio comune è cercare la distribuzione di densità (o magnetizzazione) con minima norma (tipicamente la norma L_2) che si adatta ai dati. Matematicamente, si minimizza: $\Phi = ||d - G\, m||^2 + \lambda\, ||m||^2$, dove d sono i dati osservati, G è la matrice che rappresenta l'operatore forward (relazione tra modello e dati), m è il modello (vettore di densità o magnetizzazione in una griglia discreta), e λ è il parametro di regolarizzazione. La soluzione è: $m = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T d$.

La Teoria Generale dei Problemi Inversi

La maggior parte dei problemi in geofisica può essere formulata come problema inverso: dati alcune osservazioni, determinare i parametri del modello della Terra che meglio spiegano queste osservazioni. La teoria generale dei problemi inversi fornisce il quadro matematico unificante per affrontare questi problemi.

Formalmente, un problema inverso consiste nel determinare un modello m appartenente a uno spazio dei modelli M che spiega i dati osservati d appartenenti a uno spazio dei dati D, data una relazione $g: M \rightarrow D$ (l'operatore forward) che lega modelli a dati predetti. Il problema inverso è trovare m tale che g(m) = d, o più realisticamente (dato che i dati contengono errori), trovare m che minimizza una misura di discrepanza tra g(m) e d.

I problemi inversi possono essere classificati secondo vari criteri. Un problema è lineare se g è un operatore lineare, cioè se $g(\alpha m_1 + \beta m_2) = \alpha g(m_1) + \beta g(m_2)$ per ogni α, β scalari e m_1, m_2 modelli. Molti problemi geofisici (come l'inversione sismica linearizzata o l'inversione gravimetrica) possono essere approssimati come lineari, almeno localmente. Un problema è discreto se gli spazi M e D sono di dimensione finita, mentre è continuo se almeno uno degli spazi è di dimensione infinita.

Un concetto fondamentale è quello di problema ben posto nel senso di Hadamard. Un problema è ben posto se soddisfa tre condizioni: (1) esiste una soluzione, (2) la soluzione è unica, (3) la soluzione dipende continuamente dai dati. Se una qualsiasi di queste condizioni è violata, il problema è mal posto. La maggior parte dei problemi inversi geofisici sono mal

posti, tipicamente perché la soluzione non è unica o perché non dipende continuamente dai dati.

Per problemi lineari discreti, l'operatore forward può essere rappresentato come una matrice G, e il problema diventa risolvere il sistema lineare G m = d. Se il sistema è sovradeterminato (più equazioni che incognite) e rumoroso, la soluzione ai minimi quadrati è $m = (G^TG)^{-1}G^Td$, che minimizza $||Gm - d||^2$. Tuttavia, se G^TG è mal condizionata (ha autovalori molto piccoli), questa soluzione può essere dominata dagli errori nei dati e risultare priva di significato fisico.

La decomposizione ai valori singolari (SVD) fornisce uno strumento potente per analizzare problemi lineari mal posti. La SVD di G è: $G = U \Lambda V^T$, dove U e V sono matrici ortogonali e Λ è diagonale con elementi $\lambda_i \geq 0$ (i valori singolari). La soluzione ai minimi quadrati può essere scritta come: $m = \Sigma (u_i^Td/\lambda_i) v_i$, dove la somma è sui valori singolari non nulli. Se alcuni λ_i sono molto piccoli, i corrispondenti termini nella somma possono essere molto grandi se $u_i^Td \neq 0$, causando instabilità.

La regolarizzazione di Tikhonov modifica il problema ai minimi quadrati aggiungendo un termine di penalizzazione: si minimizza $||Gm - d||^2 + \lambda||Lm||^2$, dove L è un operatore di regolarizzazione (spesso l'identità o un operatore di derivazione) e $\lambda > 0$ è il parametro di regolarizzazione. La soluzione è: $m_\lambda = (G^TG + \lambda L^TL)^{-1}G^Td$. Questa soluzione è più stabile della soluzione non regolarizzata, ma introduce un bias (distorsione). La scelta ottimale di λ richiede un compromesso tra aderenza ai dati e stabilità della soluzione.

I Metodi Statistici e Bayesiani nell'Inversione

Un approccio alternativo e sempre più popolare ai problemi inversi è quello statistico e bayesiano, che tratta modelli e dati come variabili aleatorie e cerca di caratterizzare la distribuzione di probabilità dei modelli condizionata ai dati osservati.

Nell'approccio bayesiano, si parte da una distribuzione a priori P(m) che rappresenta la nostra conoscenza del modello prima di osservare i dati. La verosimiglianza P(d|m) descrive la probabilità di osservare i dati d dato il modello m (ed è determinata dall'operatore forward e dalla statistica degli errori). Il teorema di Bayes fornisce la distribuzione a posteriori: $P(m|d) = P(d|m) P(m) / P(d)$, dove $P(d) = \int P(d|m) P(m) dm$ è la probabilità marginale dei dati (evidenza).

Se gli errori nei dati sono gaussiani con matrice di covarianza C_d e il prior è gaussiano con media m_{prior} e covarianza C_m, allora l'a posteriori è anch'esso gaussiano, con media: $m_{post} = m_{prior} + (G^TC_d^{-1}G + C_m^{-1})^{-1}G^TC_d^{-1}(d - g(m_{prior}))$, che generalizza la soluzione di Tikhonov includendo esplicitamente la covarianza a priori e la media a priori. La matrice di covarianza a posteriori è: $C_{post} = (G^TC_d^{-1}G + C_m^{-1})^{-1}$, che quantifica l'incertezza nella stima del modello.

Per problemi non lineari, l'approccio bayesiano richiede metodi di campionamento per esplorare la distribuzione a posteriori, dato che questa non ha più forma analitica semplice. I metodi Monte Carlo a catena di Markov (MCMC) sono particolarmente utili. L'algoritmo di Metropolis-Hastings, ad esempio, genera una sequenza di modelli $\{m_1, m_2, ..., m_N\}$ che, per N sufficientemente grande, sono distribuiti secondo P(m|d). Ad ogni passo, si propone un

nuovo modello m' campionando da una distribuzione di proposta q(m'|m), e si accetta con probabilità α = min(1, (P(m'|d)q(m|m'))/(P(m|d)q(m'|m))).

L'approccio bayesiano ha il vantaggio di fornire non solo una stima del modello, ma una caratterizzazione completa dell'incertezza. Inoltre, permette di incorporare naturalmente informazione a priori complessa (ad esempio, vincoli di disuguaglianza, discontinuità note, correlazioni spaziali). Lo svantaggio principale è il costo computazionale, che può essere proibitivo per problemi di grande dimensione.

L'Inversione Full-Waveform in Sismica

Un'applicazione particolarmente impegnativa della teoria inversa è l'inversione full-waveform (FWI) in sismologia e sismica di esplorazione. A differenza dei metodi tradizionali che utilizzano solo i tempi di arrivo delle fasi identificate, FWI cerca di sfruttare l'intera forma d'onda registrata, incluse le ampiezze, le fasi, e tutti i tipi di onde.

Il problema FWI è formulato come un problema di ottimizzazione non lineare: si cerca il modello di velocità v(x) (e possibilmente densità, attenuazione, anisotropia) che minimizza la differenza tra i sismogrammi osservati d_obs e quelli sintetici d_calc calcolati per il modello mediante soluzione numerica dell'equazione d'onda completa. La funzione obiettivo è tipicamente: E(v) = (1/2) Σ ||d_obs - d_calc(v)||², dove la somma è su tutte le sorgenti e ricevitori.

Il gradiente della funzione obiettivo rispetto al modello può essere calcolato efficacemente utilizzando il metodo dello stato aggiunto (adjoint state method). Si mostra che: ∇E = -∫ δu/δv · u* dt, dove u è il campo d'onda forward (dalla sorgente ai ricevitori) e u* è il campo d'onda adjoint (dai ricevitori alle sorgenti, con i residui come sorgenti). Questo approccio permette di calcolare il gradiente con un costo comparabile a quello di due simulazioni forward, indipendentemente dal numero di parametri del modello.

Una volta calcolato il gradiente, si possono utilizzare metodi di ottimizzazione come il gradiente coniugato o metodi quasi-Newton (L-BFGS) per aggiornare iterativamente il modello. Un aspetto critico è che FWI è fortemente non lineare e soffre del problema dei minimi locali: se il modello iniziale è troppo lontano dal vero modello, l'inversione può convergere a un modello errato. Per mitigare questo problema, si utilizza tipicamente una strategia multi-scala, partendo da basse frequenze (meno sensibili a minimi locali) e procedendo progressivamente verso alte frequenze.

La Geostatistica e la Caratterizzazione dell'Incertezza

La geostatistica fornisce strumenti matematici per caratterizzare e modellare la variabilità spaziale delle proprietà geologiche e geofisiche. Questo è particolarmente importante per quantificare l'incertezza nelle stime di proprietà del sottosuolo derivate da dati sparsi.

Il concetto fondamentale è quello di funzione aleatoria regionalizzata: una proprietà geofisica Z(x) è vista come una realizzazione di un processo stocastico spaziale. La struttura di correlazione spaziale è caratterizzata dal variogramma, definito come: γ(h) = (1/2) E[(Z(x+h) - Z(x))²], dove h è il vettore di separazione (lag) ed E denota il valore atteso. Il variogramma misura quanto variano i valori della proprietà in funzione della distanza: per h = 0, γ = 0 (un

punto è perfettamente correlato con se stesso), mentre per h grande, γ tende a un valore costante chiamato sill (se il processo è stazionario).

Il kriging è il metodo di interpolazione geostatistica ottimale (nel senso dei minimi quadrati) che utilizza il variogramma per stimare valori in posizioni non campionate. La stima kriging in un punto x_0 è una combinazione lineare dei dati: $Z^*(x_0) = \Sigma \lambda_i Z(x_i)$, dove i pesi λ_i sono determinati minimizzando la varianza dell'errore di stima sotto il vincolo di non distorsione ($\Sigma \lambda_i = 1$). I pesi ottimali sono soluzione del sistema: $\Sigma \lambda \gamma(x_i - x) + \mu = \gamma(x_i - x_0)$ per ogni i, con $\Sigma_i \lambda_i = 1$, dove μ è un moltiplicatore di Lagrange.

La varianza del kriging, che quantifica l'incertezza nella stima, è: $\sigma^2_k(x_0) = \Sigma_i \lambda_i \gamma(x_i - x_0) + \mu$. Questa varianza dipende solo dalla geometria dei dati e dal variogramma, non dai valori dei dati stessi. Regioni densamente campionate hanno bassa varianza di kriging, mentre regioni remote dai dati hanno alta varianza.

Per generare realizzazioni equiprobabili di campi aleatori (utile per valutazioni di incertezza in simulazioni numeriche), si utilizza la simulazione geostatistica sequenziale. In questo metodo, si visitano sequenzialmente tutti i punti di una griglia, e ad ogni punto si genera un valore campionando dalla distribuzione condizionata ai valori già generati e ai dati osservati. Utilizzando il kriging per determinare media e varianza della distribuzione condizionata, si ottengono realizzazioni che onorano i dati e riproducono la struttura di correlazione spaziale specificata dal variogramma.

Sistemi Complessi, Geofisica del Clima e Prospettive Future

La Dinamica dei Sistemi Complessi in Geofisica

La Terra è un sistema complesso caratterizzato da interazioni non lineari tra molteplici componenti che operano su scale spaziali e temporali vastamente diverse. La comprensione matematica di questi sistemi richiede strumenti dalla teoria dei sistemi dinamici, dalla meccanica statistica e dalla teoria del caos.

Un sistema dinamico è descritto da un insieme di equazioni differenziali (o alle differenze) della forma $dx/dt = f(x,t)$, dove x è il vettore di stato del sistema e f definisce l'evoluzione temporale. Il comportamento a lungo termine del sistema è caratterizzato dai suoi attrattori: insiemi nello spazio delle fasi verso cui le traiettorie tendono asintoticamente. Un attrattore può essere un punto fisso (equilibrio stabile), un ciclo limite (oscillazione periodica), o un attrattore strano (comportamento caotico).

Il caos deterministico è la proprietà di sistemi dinamici deterministici (senza casualità esplicita) di esibire comportamento apparentemente casuale e imprevedibile a lungo termine. Una caratteristica fondamentale dei sistemi caotici è la sensibilità alle condizioni iniziali: traiettorie che partono da stati iniziali arbitrariamente vicini divergono esponenzialmente nel tempo. Matematicamente, la divergenza è caratterizzata dall'esponente di Lyapunov λ, definito da: $\delta x(t) \approx \delta x(0) \exp(\lambda t)$, dove δx è la separazione tra traiettorie vicine. Per un sistema caotico, almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

L'atmosfera terrestre è un esempio paradigmatico di sistema caotico. Il famoso modello di Lorenz, derivato come approssimazione estrema delle equazioni della convezione atmosferica, consiste in tre equazioni differenziali ordinarie: dx/dt = σ(y-x), dy/dt = x(ρ-z) - y, dz/dt = xy - βz, dove σ, ρ, β sono parametri. Per valori appropriati dei parametri (ad esempio σ = 10, ρ = 28, β = 8/3), il sistema esibisce un attrattore strano con la caratteristica forma a "farfalla". Questo modello illustra come anche sistemi con poche gradi di libertà possano esibire dinamica complessa.

La prevedibilità limitata dell'atmosfera è una conseguenza diretta del caos. Anche con misure perfette delle condizioni iniziali e un modello perfetto, la crescita esponenziale degli errori inevitabili limita l'orizzonte di prevedibilità. Per l'atmosfera, questo orizzonte è dell'ordine di due settimane: oltre questo tempo, le previsioni deterministiche dettagliate diventano impossibili. Questo non significa che tutte le scale temporali siano ugualmente imprevedibili: le tendenze climatiche su scale di decenni possono essere previste statisticamente anche se i dettagli meteorologici sono caotici.

Le Equazioni del Clima e la Circolazione Generale

Il sistema climatico terrestre è un sistema accoppiato che include l'atmosfera, l'oceano, la criosfera (ghiacci), la biosfera e la superficie terrestre. La descrizione matematica completa richiede equazioni per ciascuna componente e per le loro interazioni.

Le equazioni primitive dell'atmosfera, che costituiscono la base dei modelli di circolazione generale atmosferica (GCM), sono le equazioni di Navier-Stokes su una sfera rotante, accoppiate con l'equazione termodinamica e l'equazione di continuità per il vapore acqueo. In coordinate sferiche (λ longitudine, φ latitudine, z altitudine), le equazioni del momento sono:

$\partial u/\partial t + (u/(a \cos \varphi)) \partial u/\partial \lambda + (v/a) \partial u/\partial \varphi + w \partial u/\partial z - (2\Omega + u/(a \cos \varphi)) v \sin \varphi + (u \tan \varphi)/a = -(1/(\rho a \cos \varphi)) \partial p/\partial \lambda + F_u$

$\partial v/\partial t + (u/(a \cos \varphi)) \partial v/\partial \lambda + (v/a) \partial v/\partial \varphi + w \partial v/\partial z + (2\Omega + u/(a \cos \varphi)) u \sin \varphi = -(1/(\rho a)) \partial p/\partial \varphi + F_v$

dove u è la velocità verso est, v è la velocità verso nord, w è la velocità verticale, a è il raggio terrestre, Ω è la velocità angolare di rotazione, ρ è la densità, p è la pressione, e F_u, F_v rappresentano le forze di attrito e altri termini parametrizzati.

L'equazione idrostatica fornisce l'equilibrio verticale: $\partial p/\partial z = -\rho g$, che è un'eccellente approssimazione per moti a grande scala nell'atmosfera. L'equazione termodinamica, in forma di equazione per la temperatura potenziale $\theta = T(p_0/p)^{(R/c_p)}$, è:

$\partial \theta/\partial t + (u/(a \cos \varphi)) \partial \theta/\partial \lambda + (v/a) \partial \theta/\partial \varphi + w \partial \theta/\partial z = Q/\theta$

dove Q rappresenta il riscaldamento diabatico (radiazione, calore latente di condensazione, ecc.).

Le equazioni per l'oceano sono simili, ma con alcune differenze importanti. L'oceano è incomprimibile in ottima approssimazione, quindi l'equazione di continuità è semplicemente

$\nabla \cdot v = 0$. La stratificazione di densità nell'oceano è cruciale: variazioni di temperatura e salinità creano stratificazione stabile che inibisce i moti verticali. L'approssimazione di Boussinesq, dove la densità è costante eccetto nel termine di galleggiamento, è tipicamente utilizzata.

Un aspetto fondamentale della circolazione oceanica è la circolazione termoalina (THC, Thermohaline Circulation), guidata da differenze di densità causate da variazioni di temperatura e salinità. La formazione di acqua profonda nelle regioni polari, dove il raffreddamento e l'aumento di salinità (dovuto alla formazione di ghiaccio) creano acqua densa che affonda, guida una circolazione globale che trasporta calore dai tropici ai poli. Questa circolazione ha scale temporali di centinaia o migliaia di anni.

Le equazioni di bilancio energetico globale forniscono un quadro semplificato ma utile del sistema climatico. In forma elementare, il bilancio energetico della superficie terrestre può essere scritto come: $C\, dT/dt = S(1-\alpha)/4 - \varepsilon\sigma T^4 + \Delta F$, dove C è la capacità termica del sistema, T è la temperatura globale media, $S \approx 1361$ W/m² è la costante solare, $\alpha \approx 0,3$ è l'albedo planetaria, $\varepsilon \approx 0,6$ è l'emissività effettiva (modificata dall'effetto serra), $\sigma = 5,67\times10^{-8}$ W/(m²K⁴) è la costante di Stefan-Boltzmann, e ΔF rappresenta forzanti aggiuntive (come aumenti di gas serra).

I Feedback Climatici e la Stabilità del Sistema

Il sistema climatico è caratterizzato da numerosi meccanismi di feedback, sia positivi (che amplificano le perturbazioni) che negativi (che le attenuano). La comprensione quantitativa di questi feedback è cruciale per prevedere la risposta del clima a forzanti antropogenici.

Il feedback del vapore acqueo è il più importante feedback positivo. Un aumento di temperatura aumenta la pressione di vapore saturo, permettendo all'atmosfera di contenere più vapore acqueo. Poiché il vapore acqueo è un potente gas serra, questo amplifica il riscaldamento iniziale. Quantitativamente, se ΔT_0 è il riscaldamento senza feedback e ΔT è il riscaldamento totale, il fattore di amplificazione dovuto al vapore acqueo è circa 1,5-2, cioè $\Delta T \approx (1,5 \text{ a } 2)\, \Delta T_0$.

Il feedback albedo-ghiaccio è un altro feedback positivo importante. Una diminuzione della copertura di ghiaccio e neve riduce l'albedo della superficie (il ghiaccio riflette circa il settanta per cento della radiazione solare, mentre l'oceano e la terra ne riflettono solo il dieci-trenta per cento), portando a maggiore assorbimento di radiazione solare e ulteriore riscaldamento. Questo feedback è particolarmente importante nelle regioni polari e ha contribuito all'amplificazione artica (il riscaldamento nell'Artico è circa due volte più veloce della media globale).

Il feedback delle nubi è più complesso e incerto. Le nubi hanno due effetti opposti: riflettono la radiazione solare in arrivo (effetto albedo, tendenza al raffreddamento) e intrappolano la radiazione infrarossa emessa dalla superficie (effetto serra, tendenza al riscaldamento). L'effetto netto dipende dal tipo, dall'altezza e dalla distribuzione delle nubi. Nubi basse e spesse tendono ad avere un effetto netto di raffreddamento, mentre nubi alte e sottili (cirri) tendono a scaldare. La risposta complessiva delle nubi al riscaldamento globale è una delle maggiori incertezze nei modelli climatici.

Matematicamente, il sistema di feedback può essere analizzato utilizzando la teoria del controllo lineare. Se λ_0 è il parametro di feedback radiativo senza feedback addizionali (circa 3,2 W/(m²K) per l'atmosfera terrestre), e f_i sono i feedback addizionali (positivi se riscaldanti), il parametro di feedback totale è $\lambda = \lambda_0 - \Sigma f_i$, e la sensibilità climatica (variazione di temperatura per una data forzante radiativa ΔF) è: $\Delta T = \Delta F/\lambda$. Il fattore di amplificazione totale è: $g = \lambda_0/\lambda = 1/(1 - \Sigma f_i/\lambda_0)$. Se $\Sigma f_i/\lambda_0 \approx 0,5$ (valore tipico dalle analisi dei modelli), $g \approx 2$.

La Matematica dei Paleoclimi e dei Cicli Glaciali

Le registrazioni paleoclimatiche mostrano che la Terra ha sperimentato drammatiche fluttuazioni climatiche nel passato geologico. I cicli glaciali-interglaciali del Quaternario (ultimi 2,6 milioni di anni), con periodo dominante di circa centomila anni, sono particolarmente ben documentati e pongono sfide matematiche interessanti.

La teoria di Milankovitch spiega i cicli glaciali in termini di variazioni cicliche nei parametri orbitali terrestri: l'eccentricità dell'orbita (periodo ≈ cento mila anni), l'obliquità dell'asse di rotazione (periodo ≈ quarantunomila anni), e la precessione degli equinozi (periodo ≈ ventitremila anni). Queste variazioni modificano la distribuzione stagionale e latitudinale della radiazione solare, pur lasciando quasi invariata la radiazione totale annua integrata.

Un aspetto matematicamente intrigante è che i periodi di Milankovitch non corrispondono esattamente ai periodi osservati nei dati paleoclimatici. In particolare, il periodo di centomila anni che domina i cicli glaciali degli ultimi ottocentomila anni non ha un corrispondente chiaro nei parametri orbitali (l'eccentricità ha un periodo di circa centomila anni, ma ha un'ampiezza molto piccola). Questo suggerisce che la risposta climatica sia fortemente non lineare, con meccanismi di amplificazione e thresholds che modificano la risposta diretta alla forzante orbitale.

Un modello matematico semplice che cattura alcune caratteristiche dei cicli glaciali è l'equazione di bilancio di massa del ghiaccio: $dV/dt = a - b(V)$, dove V è il volume totale del ghiaccio, a è il tasso di accumulo (che dipende dalla precipitazione nevosa), e $b(V)$ è il tasso di ablazione (che dipende dalla temperatura e quindi dalla radiazione solare e dall'effetto albedo del ghiaccio stesso). Con forme appropriate di a e b che includono dipendenze non lineari e ritardi temporali, questo modello può produrre oscillazioni con periodi simili a quelli osservati.

Un'estensione è il modello di Saltzman, che include tre variabili: il volume del ghiaccio continentale I, la temperatura dell'oceano profondo T_o, e la concentrazione atmosferica di CO_2. Le equazioni hanno la forma: $dI/dt = f_1(I, T_o, \text{insolazione})$, $dT_o/dt = f_2(I, T_o)$, $dCO_2/dt = f_3(I, T_o, CO_2)$, dove le funzioni f_i includono termini lineari, non lineari e parametrizzazioni di processi biogeochimici. Questo sistema di equazioni differenziali ordinarie può esibire oscillazioni auto-sostenute con le caratteristiche qualitative dei cicli glaciali osservati.

La Turbolenza Geofisica e le Teorie di Chiusura

La turbolenza è onnipresente nei fluidi geofisici, dall'atmosfera agli oceani al nucleo esterno. La descrizione matematica completa della turbolenza richiede la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes con condizioni al contorno appropriate, ma questo è generalmente impossibile per i numeri di Reynolds estremamente alti caratteristici dei flussi geofisici.

La teoria di Kolmogorov della turbolenza tridimensionale omogenea e isotropa fornisce previsioni per la distribuzione spettrale dell'energia. In regime completamente turbolento, con numero di Reynolds Re >> 1, esiste un range inerziale di scale dove la produzione e la dissipazione di energia sono trascurabili, e l'energia cascata da scale grandi a scale piccole a tasso costante ε (tasso di dissipazione). L'unico parametro rilevante in questo range è ε, e l'analisi dimensionale porta allo spettro di Kolmogorov: E(k) = C ε^(2/3) k^(-5/3), dove E(k) è la densità spettrale di energia cinetica, k è il numero d'onda, e C ≈ 1,5 è la costante di Kolmogorov.

La turbolenza geofisica, tuttavia, differisce dalla turbolenza tridimensionale isotropa in modi importanti. La rotazione e la stratificazione tendono a "bidimensionalizzare" il flusso, inibendo i moti verticali. In turbolenza quasi-bidimensionale, la vorticità è conservata, e questo porta a una cascata inversa di energia: l'energia fluisce dalle scale piccole (dove è iniettata) alle scale grandi. Lo spettro energetico nel range di cascata inversa è E(k) ∝ k^(-5/3), simile allo spettro 3D, ma con significato fisico diverso.

Le equazioni di Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) decompongono il flusso in media e fluttuazione: $v = \bar{v} + v'$, dove la barra indica media temporale o d'insieme. Mediando le equazioni di Navier-Stokes, si ottiene: $\partial\bar{v}/\partial t + \bar{v}\cdot\nabla\bar{v} = -(1/\rho)\nabla\bar{p} + \nu\nabla^2\bar{v} - \nabla\cdot\langle v'v'\rangle$, dove $\langle v'v'\rangle$ è il tensore di Reynolds stress, che rappresenta il trasporto di momento da parte delle fluttuazioni turbolente. Il problema è che questo introduce nuove incognite (le correlazioni delle fluttuazioni), portando al problema di chiusura.

Le teorie di chiusura cercano di esprimere i Reynolds stress in termini delle quantità medie. La chiusura più semplice è l'ipotesi di Boussinesq: $\langle v'v'\rangle = -\nu_t(\nabla\bar{v} + (\nabla\bar{v})^T) + (2/3)k\,I$, dove ν_t è la viscosità turbolenta, $k = \langle v'\cdot v'\rangle/2$ è l'energia cinetica turbolenta, e I è il tensore identità. Modelli più sofisticati includono equazioni di trasporto per k e per il tasso di dissipazione ε (modelli k-ε), o per k e la frequenza turbolenta ω (modelli k-ω).

La Modellazione Numerica e il Calcolo ad Alte Prestazioni

La simulazione numerica dei sistemi geofisici richiede la discretizzazione delle equazioni differenziali parziali e la loro soluzione su computers. Per problemi tridimensionali dipendenti dal tempo, questo porta a sistemi con milioni o miliardi di gradi di libertà, richiedendo calcolo ad alte prestazioni (HPC).

I metodi di discretizzazione spaziale più comuni sono le differenze finite, gli elementi finiti e i metodi spettrali. Le differenze finite approssimano le derivate mediante rapporti incrementali: $\partial u/\partial x \approx (u(x+\Delta x) - u(x))/\Delta x$ (differenza in avanti, accuratezza $O(\Delta x)$) o $\partial u/\partial x \approx (u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x))/(2\Delta x)$ (differenza centrata, accuratezza $O(\Delta x^2)$). Per derivate seconde: $\partial^2 u/\partial x^2 \approx (u(x+\Delta x) - 2u(x) + u(x-\Delta x))/\Delta x^2$ con accuratezza $O(\Delta x^2)$.

I metodi spettrali rappresentano le funzioni incognite come somme di funzioni base (tipicamente polinomi di Legendre o funzioni trigonometriche): $u(x) = \Sigma\,\hat{u}_n\,\varphi_n(x)$, dove $\hat{u}_n$

sono i coefficienti spettrali. Le derivate si calcolano esattamente nello spazio spettrale. I metodi spettrali hanno accuratezza molto alta (esponenziale per funzioni lisce) ma richiedono trasformate veloci (FFT per base trigonometrica) e sono meno flessibili per geometrie complesse.

Per l'integrazione temporale, sono disponibili molti schemi. Il metodo di Eulero esplicito è il più semplice: u^(n+1) = u^n + Δt f(u^n, t^n), ma è condizionalmente stabile con vincolo di stabilità Δt ≤ C Δx/v (condizione CFL, Courant-Friedrichs-Lewy), dove v è la velocità caratteristica. Metodi impliciti come il metodo di Eulero implicito u^(n+1) = u^n + Δt f(u^(n+1), t^(n+1)) sono incondizionatamente stabili ma richiedono la soluzione di sistemi (potenzialmente non lineari) ad ogni passo temporale.

I metodi Runge-Kutta forniscono un buon compromesso tra accuratezza e costo computazionale. Il metodo RK4 (Runge-Kutta quarto ordine) è particolarmente popolare: k_1 = Δt f(u^n, t^n), k_2 = Δt f(u^n + k_1/2, t^n + Δt/2), k_3 = Δt f(u^n + k_2/2, t^n + Δt/2), k_4 = Δt f(u^n + k_3, t^n + Δt), u^(n+1) = u^n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. Questo metodo ha accuratezza O(Δt⁴).

Il calcolo parallelo è essenziale per simulazioni geofisiche realistiche. La parallelizzazione dei dati (domain decomposition) divide il dominio spaziale in sottodomini assegnati a diversi processori. I processori comunicano i valori al confine dei sottodomini utilizzando Message Passing Interface (MPI). L'efficienza parallela dipende dal rapporto tra computazione e comunicazione: domini grandi per processore minimizzano la comunicazione relativa.

L'Assimilazione dei Dati e la Previsione

L'assimilazione dei dati combina osservazioni sparse e imperfette con modelli numerici per ottenere stime ottimali dello stato del sistema. Questo è fondamentale per la previsione meteorologica e oceanografica, dove le condizioni iniziali accurate sono essenziali.

Il filtro di Kalman fornisce la soluzione ottimale (nel senso dei minimi quadrati) per sistemi lineari con errori gaussiani. Il filtro opera in due fasi: previsione e aggiornamento. Nella fase di previsione, si evolve lo stato stimato e la sua matrice di covarianza utilizzando il modello: x_f = M x_a, P_f = M P_a M^T + Q, dove x_f è la previsione (forecast), x_a è l'analisi precedente, M è l'operatore del modello linearizzato, P è la matrice di covarianza degli errori, e Q è la covarianza degli errori del modello.

Nella fase di aggiornamento, si combinano la previsione con le nuove osservazioni y: x_a = x_f + K(y - H x_f), P_a = (I - K H) P_f, dove H è l'operatore di osservazione (che mappa lo stato nello spazio delle osservazioni), e K = P_f H^T (H P_f H^T + R)^(-1) è la matrice di guadagno di Kalman, con R matrice di covarianza degli errori di osservazione.

Per sistemi non lineari e ad alta dimensionalità come i modelli atmosferici, il filtro di Kalman classico è impraticabile perché richiede la memorizzazione e propagazione di matrici di covarianza di dimensione n×n, dove n può essere 10^8 o più. L'Extended Kalman Filter (EKF) linearizza il modello attorno alla traiettoria stimata, ma ancora richiede matrici molto grandi. L'Ensemble Kalman Filter (EnKF) approssima la covarianza usando un ensemble di N realizzazioni (tipicamente N ≈ 50-100 << n), rendendo il metodo computazionalmente fattibile.

La variational assimilation (3D-Var, 4D-Var) formula l'assimilazione come problema di ottimizzazione: si cerca lo stato x che minimizza J(x) = (x - x_b)^T B^(-1) (x - x_b) + (y - H(x))^T R^(-1) (y - H(x)), dove x_b è lo stato di background (prima stima), B è la sua covarianza, y sono le osservazioni, H è l'operatore di osservazione (potenzialmente non lineare), e R è la covarianza degli errori di osservazione. Il 4D-Var estende questo a una finestra temporale, assimilando osservazioni distribuite nel tempo e richiedendo l'integrazione del modello e del suo aggiunto.

Meccanica del Continuo Avanzata

Introduzione alla Teoria delle Deformazioni Finite

La meccanica del continuo, nella sua formulazione classica presentata nei capitoli precedenti, si limita spesso all'approssimazione di deformazioni infinitesime, dove i gradienti di spostamento sono assunti piccoli rispetto all'unità e i loro prodotti possono essere trascurati. Questa approssimazione, sebbene eccellente per molte applicazioni geofisiche come la propagazione delle onde sismiche o le deformazioni elastiche della litosfera, diventa inadeguata quando si affrontano fenomeni caratterizzati da deformazioni grandi e finite, quali il flusso viscoso del mantello terrestre su scale temporali geologiche, la deformazione plastica delle rocce in zone di faglia durante i terremoti, o la risposta non lineare dei materiali sottoposti a sollecitazioni estreme.

La teoria delle deformazioni finite rappresenta la generalizzazione rigorosa della meccanica del continuo che non impone restrizioni sull'ampiezza delle deformazioni. In questa formulazione, diventa essenziale distinguere chiaramente tra la configurazione di riferimento del corpo continuo, tipicamente identificata con lo stato iniziale al tempo $t = 0$, e la configurazione attuale o deformata al tempo generico t. Ogni particella materiale è identificata univocamente dalle sue coordinate materiali o lagrangiane $X = (X_1, X_2, X_3)$ nella configurazione di riferimento, mentre la sua posizione nella configurazione attuale è descritta dalle coordinate spaziali o euleriane $x = (x_1, x_2, x_3)$.

La mappa di deformazione χ che collega queste due configurazioni è una funzione vettoriale che assegna a ogni punto materiale X la sua posizione attuale x secondo la relazione $x = \chi(X, t)$. Affinché questa mappa descriva una deformazione fisicamente ammissibile, essa deve soddisfare alcune condizioni fondamentali di regolarità. In primo luogo, la mappa deve essere continua e differenziabile, almeno a tratti, per evitare la formazione di lacune o sovrapposizioni nel materiale. In secondo luogo, il determinante del gradiente di deformazione, che definiremo a breve, deve essere strettamente positivo in ogni punto, garantendo così che il materiale non possa essere compresso fino a volume nullo né subire inversioni di orientazione, fenomeni entrambi fisicamente impossibili per un continuo materiale.

Il Tensore Gradiente di Deformazione e la Decomposizione Polare

Il concetto centrale nella teoria delle deformazioni finite è il tensore gradiente di deformazione F, definito come il gradiente della mappa di deformazione rispetto alle coordinate materiali. In notazione indiciale, le componenti di F sono date da $F_{i\alpha} =$

∂x_i/∂X_α, dove gli indici latini i, j, k variano da uno a tre e si riferiscono alle coordinate spaziali, mentre gli indici greci α, β, γ si riferiscono alle coordinate materiali. Questo tensore, che è un tensore misto con un indice spaziale e uno materiale, cattura completamente la geometria locale della deformazione.

Una proprietà fondamentale del gradiente di deformazione è che esso mappa elementi di linea infinitesimi dalla configurazione di riferimento alla configurazione attuale. Se consideriamo due punti materiali infinitamente vicini X e X + dX nella configurazione di riferimento, che occupano le posizioni x e x + dx nella configurazione attuale, la relazione differenziale che li lega è data da dx_i = F_{iα} dX_α. Questo significa che il gradiente di deformazione trasforma vettori tangenti dalla configurazione di riferimento a vettori tangenti nella configurazione attuale.

Il determinante del gradiente di deformazione, denotato con J = det(F), ha un significato fisico profondo: esso rappresenta il rapporto locale tra il volume infinitesimo nella configurazione attuale e il volume infinitesimo corrispondente nella configurazione di riferimento. Matematicamente, se dV_0 è un elemento di volume nella configurazione di riferimento e dV è l'elemento di volume corrispondente nella configurazione attuale, allora $dV = J\, dV_0$. La condizione di impenetrabilità della materia richiede che J sia strettamente positivo ovunque, mentre la condizione di incomprimibilità, che è spesso un'ottima approssimazione per molti materiali terrestri su scale temporali lunghe, corrisponde al vincolo J = 1.

Un risultato matematico di importanza capitale è il teorema di decomposizione polare, che afferma che il gradiente di deformazione F può sempre essere decomposto univocamente nel prodotto di un tensore di rotazione puro R e un tensore di stiramento puro simmetrico e definito positivo. Esistono due decomposizioni polari equivalenti: la decomposizione destra F = RU, dove U è il tensore di stiramento destro, e la decomposizione sinistra F = VR, dove V è il tensore di stiramento sinistro. I tensori R, U e V sono tutti tensori del secondo ordine, ma hanno proprietà matematiche e interpretazioni fisiche distinte.

Il tensore di rotazione R appartiene al gruppo speciale ortogonale SO(3), il che significa che soddisfa le condizioni R^T R = R R^T = I e det(R) = 1, dove I è il tensore identità e l'apice T denota la trasposizione. Queste condizioni esprimono matematicamente il fatto che R rappresenta una rotazione rigida pura, senza alcuna deformazione associata. Geometricamente, R ruota gli assi materiali senza cambiare le lunghezze o gli angoli relativi.

Il tensore di stiramento destro U, definito da U = (F^T F)^(1/2), è un tensore simmetrico e definito positivo che opera sulla configurazione di riferimento. Esso descrive come gli elementi di linea vengono allungati o contratti, indipendentemente da qualsiasi rotazione successiva. Il tensore di stiramento sinistro V = (F F^T)^(1/2) è anch'esso simmetrico e definito positivo, ma opera sulla configurazione attuale. I due tensori di stiramento sono cinematicamente equivalenti nel senso che descrivono la stessa deformazione, ma V è più naturale quando si lavora in descrizione spaziale (euleriana), mentre U è più naturale in descrizione materiale (lagrangiana).

Poiché U e V sono tensori simmetrici, essi possono essere diagonalizzati mediante una trasformazione ortogonale. Esistono quindi tre direzioni principali di stiramento (gli autovettori) lungo le quali lo stiramento è puramente normale, senza componenti di taglio, e

tre stiramenti principali λ_1, λ_2, λ_3 (gli autovalori) che rappresentano i rapporti di allungamento lungo queste direzioni principali. Gli stiramenti principali sono sempre positivi per una deformazione fisicamente ammissibile, e il vincolo di incomprimibilità si esprime elegantemente come $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$.

Misure di Deformazione: Tensori di Cauchy-Green e di Eulero-Almansi

Mentre il gradiente di deformazione F contiene tutta l'informazione sulla geometria della deformazione, non è di per sé una misura di deformazione nel senso stretto, poiché dipende dalla rotazione rigida. Per quantificare la deformazione pura, separata dalla rotazione, si introducono i tensori di deformazione, che sono tensori simmetrici del secondo ordine costruiti a partire da F.

Il tensore destro di Cauchy-Green, denotato con C, è definito come C = F^T F = U². Essendo il quadrato del tensore di stiramento destro, C è un tensore simmetrico e definito positivo che opera sulla configurazione di riferimento. Le sue componenti in coordinate materiali sono C_αβ = F_{iα} F_{iβ} = (∂x_i/∂X_α)(∂x_i/∂X_β). Questo tensore ha la proprietà notevole che la variazione del quadrato della lunghezza di un elemento di linea materiale può essere espressa in termini di C come segue: |dx|² - |dX|² = (C_αβ - δ_αβ) dX_α dX_β, dove δ_αβ è il delta di Kronecker. Si vede quindi che C = I corrisponde all'assenza di deformazione (moto rigido puro).

Il tensore di deformazione di Green-Lagrange E è definito come la metà della differenza tra C e il tensore identità: E = (1/2)(C - I), ovvero in componenti E_αβ = (1/2)(C_αβ - δ_αβ) = (1/2)[(∂x_i/∂X_α)(∂x_i/∂X_β) - δ_αβ]. Questo tensore misura la deformazione in modo tale che E = 0 corrisponde all'assenza di deformazione. Espandendo le derivate parziali in termini del campo di spostamento u definito da x = X + u, si ottiene l'espressione E_αβ = (1/2)[∂u_α/∂X_β + ∂u_β/∂X_α + (∂u_γ/∂X_α)(∂u_γ/∂X_β)]. Nell'approssimazione di deformazioni infinitesime, dove i gradienti di spostamento sono piccoli, si trascura il termine quadratico ottenendo il tensore di deformazione infinitesima ε_αβ = (1/2)[∂u_α/∂X_β + ∂u_β/∂X_α], che è il tensore utilizzato nella teoria lineare dell'elasticità.

Analogamente, lavorando in descrizione spaziale, si definisce il tensore sinistro di Cauchy-Green B = F F^T = V², con componenti B_ij = F_{iα} F_{jα} in coordinate spaziali. Il tensore di deformazione di Eulero-Almansi, che è la controparte spaziale del tensore di Green-Lagrange, è definito come e = (1/2)(I - B^(-1)). Questo tensore misura la deformazione nella configurazione attuale ed è particolarmente utile nelle formulazioni euleriane della meccanica del continuo.

Un'altra misura di deformazione importante è il tensore logaritmico di deformazione, definito come ε^log = (1/2) ln(C) = ln(U), dove ln denota il logaritmo naturale di un tensore, definito attraverso la decomposizione spettrale. Questo tensore ha la proprietà particolarmente attraente di essere additivo per deformazioni successive: se un corpo subisce prima una deformazione caratterizzata da F_1 e poi una deformazione F_2, il gradiente totale è $F = F_2 F_1$, ma i tensori logaritmici si sommano semplicemente: ε^log_totale = ε^log_1 + ε^log_2. Questa proprietà rende il tensore logaritmico particolarmente utile in problemi dove il materiale subisce una storia complessa di deformazioni successive.

Tensori di Sforzo: Cauchy, Primo e Secondo Piola-Kirchhoff

Così come esistono diverse misure di deformazione, esistono anche diverse definizioni di tensore degli sforzi, ciascuna naturale in un particolare contesto o formulazione della meccanica del continuo. La definizione più intuitiva fisicamente è il tensore degli sforzi di Cauchy σ, che rappresenta la vera forza per unità di area attuale agente su una superficie materiale nella configurazione deformata.

Consideriamo un elemento di superficie infinitesimo nella configurazione attuale, caratterizzato dal vettore area da = n dA, dove n è il versore normale alla superficie e dA è l'area. La forza df che agisce su questo elemento è data dal postulato di Cauchy come df_i = σ_ij n_j dA. Il tensore di Cauchy σ è quindi definito come il tensore che, contratto con il vettore normale, fornisce il vettore trazione. Per l'equilibrio del momento angolare, il tensore di Cauchy deve essere simmetrico (in assenza di coppie distribuite): σ_ij = σ_ji.

Tuttavia, nella formulazione lagrangiana della meccanica del continuo, dove si lavora nella configurazione di riferimento, è più naturale introdurre tensori di sforzo che si riferiscono all'area e all'orientazione nella configurazione indeformata. Il primo tensore di Piola-Kirchhoff P è definito dalla relazione df_i = P_iα N_α dA_0, dove N è il versore normale nella configurazione di riferimento e dA_0 è l'area indeformata. Il primo tensore di Piola-Kirchhoff è legato al tensore di Cauchy dalla relazione P = J σ F^(-T), dove F^(-T) denota la trasposta dell'inversa di F. A differenza del tensore di Cauchy, P non è generalmente simmetrico.

Per formulare leggi costitutive in modo coerente con la struttura lagrangiana, si introduce il secondo tensore di Piola-Kirchhoff S, definito dalla relazione S = J F^(-1) σ F^(-T) = F^(-1) P. Questo tensore è simmetrico e può essere visto come la controparte "di sforzo" del tensore di deformazione di Green-Lagrange E. Infatti, la potenza meccanica per unità di volume di riferimento può essere espressa elegantemente come Ṡ_αβ E_αβ, dove il punto denota la derivata materiale rispetto al tempo.

La relazione tra questi vari tensori di sforzo riflette le diverse scelte di normalizzazione per le forze e le aree. Il tensore di Cauchy è il più intuitivo perché rappresenta le vere forze fisiche per unità di area vera, ma non è comodo per formulazioni lagrangiane. Il secondo tensore di Piola-Kirchhoff è matematicamente elegante e simmetrico, il che facilita la formulazione di leggi costitutive, ma non ha un'interpretazione fisica diretta semplice. Il primo tensore di Piola-Kirchhoff è un compromesso: esso rappresenta la forza attuale per unità di area di riferimento.

Leggi Costitutive per Deformazioni Finite: Materiali Iperelastici

Le leggi costitutive per materiali solidi in regime di deformazioni finite devono essere formulate con particolare cura per garantire che siano obiettive, cioè indipendenti dalla scelta del sistema di riferimento e dalla sovrapposizione di rotazioni rigide. Un modo elegante per garantire l'obiettività è esprimere la legge costitutiva come una relazione tra quantità tensoriali definite nella configurazione di riferimento, che è fissa.

Per materiali elastici, l'approccio più generale è quello dei materiali iperelastici, per i quali esiste una funzione energia di deformazione W(F) tale che il secondo tensore di Piola-Kirchhoff deriva dall'energia mediante S = ∂W/∂E. Equivalentemente, il primo tensore

di Piola-Kirchhoff è dato da P = ∂W/∂F. La funzione energia W è una funzione scalare del gradiente di deformazione (o equivalentemente del tensore di Cauchy-Green o di Green-Lagrange) e rappresenta l'energia elastica immagazzinata per unità di volume di riferimento.

Per garantire l'obiettività, la funzione energia deve essere invariante rispetto a rotazioni rigide sovrapposte alla deformazione. Questo requisito implica che W può dipendere da F solamente attraverso il tensore destro di Cauchy-Green C = F^T F, poiché C è invariante per rotazioni: se F è sostituito da Q F, dove Q è una rotazione arbitraria, allora C viene sostituito da (Q F)^T (Q F) = F^T Q^T Q F = F^T F = C, essendo Q^T Q = I per tensori ortogonali.

Per materiali isotropi, dove non esiste direzione materiale preferenziale, la funzione energia deve essere invariante anche rispetto a rotazioni nella configurazione di riferimento. Questo requisito ulteriore implica che W può dipendere da C solamente attraverso i suoi invarianti scalari. I tre invarianti principali del tensore C sono I_1 = tr(C) = C_αα, I_2 = (1/2)[(tr C)² - tr(C²)] = (1/2)[C_αα C_ββ - C_αβ C_βα], e I_3 = det(C) = J². Alternativamente, poiché C ha gli stessi autovalori del quadrato degli stiramenti principali, si può esprimere W in termini degli stiramenti principali λ_1, λ_2, λ_3, con la condizione che W sia simmetrica in queste variabili.

Un modello iperelastico semplice ma importante è il materiale neo-hookiano, la cui funzione energia è data da W = (μ/2)(I_1 - 3) - μ ln(J) + (λ/2)(ln J)², dove μ e λ sono le costanti di Lamé del materiale. Questo modello è una generalizzazione non lineare della legge di Hooke e riduce ad essa nel limite di deformazioni infinitesime. Il termine (μ/2)(I_1 - 3) cattura l'energia associata al cambiamento di forma (deformazione deviatorica), mentre i termini logaritmici catturano l'energia di dilatazione volumetrica.

Un altro modello ampiamente utilizzato è il materiale di Mooney-Rivlin, con funzione energia W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + K(J - 1)², dove C_1, C_2 sono costanti materiali e K è il modulo di comprimibilità. Questo modello, che include dipendenza sia dal primo che dal secondo invariante, descrive meglio il comportamento di elastomeri e materiali polimerici sottoposti a grandi deformazioni.

Per materiali incomprimibili, dove J = 1 è imposto come vincolo, la funzione energia dipende solo dai primi due invarianti (o equivalentemente da I_1 e I_2, dato che I_3 = 1). Lo sforzo in materiali incomprimibili include un contributo indeterminato da una pressione idrostatica arbitraria p, che deve essere determinata dalle condizioni al contorno. Il tensore di Cauchy assume la forma σ = -p I + (2/J) F (∂W/∂C) F^T.

Materiali Anisotropi e Invarianti Strutturali

Molti materiali geologici esibiscono anisotropia, cioè le loro proprietà meccaniche dipendono dalla direzione. Questa anisotropia può derivare da allineamento preferenziale di cristalli (anisotropia cristallografica), da layering sedimentario, da orientazione preferenziale di fratture, o da deformazione plastica che crea fabric nel materiale.

Per materiali anisotropi, la funzione energia W dipende non solo dagli invarianti di C, ma anche dall'orientazione delle direzioni materiali preferenziali rispetto alla deformazione. Queste direzioni preferenziali sono descritte matematicamente da vettori strutturali a_0^(i)

definiti nella configurazione di riferimento, dove l'indice i etichetta le diverse famiglie di direzioni preferenziali.

Un esempio importante è quello di materiali trasversalmente isotropi, che hanno un solo asse di simmetria materiale. Tali materiali sono caratterizzati da un singolo vettore strutturale a_0. Gli invarianti addizionali che entrano nella funzione energia sono $I_4 = a_0 \cdot (C\, a_0) = C_\alpha\beta\, a_0\text{^}\alpha\, a_0\text{^}\beta$, che misura lo stiramento quadratico nella direzione dell'asse di simmetria, e $I_5 = a_0 \cdot (C^2\, a_0)$, che cattura effetti di ordine superiore.

Per un materiale trasversalmente isotropo, la funzione energia ha la forma generale $W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$. Quando la deformazione è tale che l'asse di simmetria non viene stirato ($I_4 = 1$) e si allinea con una direzione principale dello stiramento, il materiale si comporta come se fosse isotropo nel piano perpendicolare all'asse. Questo tipo di anisotropia è rilevante, per esempio, per rocce sedimentarie laminate o per rocce metamorfiche con foliazione ben sviluppata.

Un modello specifico per materiali trasversalmente isotropi è il modello di Holzapfel-Gasser-Ogden, sviluppato originariamente per tessuti biologici ma applicabile anche a certi materiali geologici: $W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + (k_1/2k_2)\, \Sigma_i \{\exp[k_2(\bar{I}_4\text{^}(i) - 1)^2] - 1\}$, dove la somma è sulle famiglie di fibre, $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_4\text{^}(i)$ sono gli invarianti isocorici (cioè calcolati usando la parte isocora del gradiente di deformazione $\bar{F} = J\text{^}(-1/3)\, F$), e C_{10}, k_1, k_2 sono parametri materiali. Il termine esponenziale cattura l'irrigidimento progressivo delle fibre quando vengono stirate.

Per materiali ortotropi, che hanno tre piani mutuamente ortogonali di simmetria materiale, si introducono tre vettori strutturali ortogonali $a_0\text{^}(1)$, $a_0\text{^}(2)$, $a_0\text{^}(3)$. Gli invarianti addizionali includono $I_4\text{^}(i) = a_0\text{^}(i) \cdot (C\, a_0\text{^}(i))$ per i = 1, 2, 3, che misurano gli stiramenti quadratici lungo i tre assi di simmetria, e invarianti misti del tipo $I_8\text{^}(ij) = a_0\text{^}(i) \cdot (C\, a_0\text{^}(j))$ che accoppiano direzioni diverse.

La teoria generale dell'anisotropia in deformazioni finite è matematicamente elegante ma computazionalmente complessa. Essa richiede l'identificazione dei vettori strutturali, che possono evolversi durante la deformazione plastica, e la determinazione sperimentale di un numero potenzialmente grande di parametri materiali. Tuttavia, questa complessità è necessaria per descrivere accuratamente il comportamento di rocce fortemente deformate o di materiali compositi naturali.

Equazioni di Bilancio in Configurazione Deformata

Le equazioni fondamentali di bilancio della meccanica del continuo – conservazione della massa, dell'impulso e dell'energia – devono essere riscritte per deformazioni finite, tenendo conto della distinzione tra configurazioni di riferimento e attuale.

La conservazione della massa afferma che la massa di ogni porzione materiale del corpo rimane costante durante il moto. In forma integrale, se $\rho_0(X)$ è la densità nella configurazione di riferimento e $\rho(x,t)$ è la densità nella configurazione attuale, la massa di una regione materiale Ω_0 è data da $M = \int_{\Omega_0} \rho_0\, dV_0 = \int_{\Omega} \rho\, dV$, dove Ω è la configurazione attuale della stessa regione. Usando la relazione $dV = J\, dV_0$, otteniamo la relazione locale $\rho\, J = \rho_0$, che esprime la conservazione della massa in forma lagrangiana.

Derivando questa relazione rispetto al tempo seguendo la particella materiale, e usando l'identità $\dot{D}/Dt = J\,\mathrm{tr}(D)$, dove $D = (1/2)(\nabla v + \nabla v^T)$ è il tensore tasso di deformazione (la parte simmetrica del gradiente di velocità $L = \nabla v$), si ottiene la forma euleriana della conservazione della massa: $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho v) = 0$, che è l'equazione di continuità familiare. Per materiali incomprimibili, $J = 1$ costante, quindi $\rho = \rho_0$ costante e l'equazione di continuità si riduce semplicemente a $\nabla\cdot v = 0$.

La conservazione dell'impulso (seconda legge di Newton) afferma che il tasso di variazione dell'impulso di una porzione materiale eguaglia la forza totale (superficiale e di volume) che agisce su di essa. In forma integrale: $d/dt \int_\Omega \rho\, v\, dV = \int_{\partial\Omega} t\, dA + \int_\Omega \rho\, b\, dV$, dove $t = \sigma n$ è il vettore trazione sulla superficie $\partial\Omega$ e b è la forza di volume per unità di massa (tipicamente la gravità). Usando il teorema della divergenza e la formula di trasporto di Reynolds, si ottiene la forma locale $\rho\, Dv/Dt = \nabla\cdot\sigma + \rho b$, che sono le equazioni di Cauchy del moto.

In formulazione lagrangiana, usando il primo tensore di Piola-Kirchhoff, le equazioni del moto assumono la forma $\rho_0\, D^2x/Dt^2 = \nabla_X \cdot P + \rho_0\, b$, dove ∇_X denota il gradiente rispetto alle coordinate materiali X. Questa forma è particolarmente conveniente quando si risolvono problemi al contorno in termini di coordinate materiali.

La conservazione dell'energia, espressa dal primo principio della termodinamica, afferma che il tasso di variazione dell'energia totale (cinetica più interna) di una porzione materiale eguaglia la potenza delle forze esterne più il calore fornito. In forma locale, per un materiale senza conduzione di calore e senza sorgenti interne, si ha $\rho\, De/Dt = \sigma : D$, dove e è l'energia interna specifica e il doppio punto denota la contrazione completa (prodotto scalare tra tensori). Questo mostra che il lavoro delle forze interne aumenta l'energia interna del materiale.

Cinematica delle Deformazioni: Tensori Tasso di Deformazione e Vorticità

La descrizione cinematica del moto di un continuo richiede non solo la conoscenza del gradiente di deformazione F, che descrive la deformazione totale dalla configurazione di riferimento, ma anche del suo tasso di variazione, che descrive come la deformazione sta evolvendo istantaneamente.

Il gradiente di velocità L è definito come $L = \nabla v = (\partial v_i/\partial x_j)$, ed è legato al tasso di variazione di F dalla relazione $\dot{F} = L\,F$. Il gradiente di velocità può essere decomposto univocamente nella somma di una parte simmetrica, il tensore tasso di deformazione $D = (1/2)(L + L^T)$, e di una parte antisimmetrica, il tensore tasso di rotazione o vorticità $W = (1/2)(L - L^T)$.

Il tensore D descrive il tasso di deformazione pura, senza rotazione. Le sue componenti diagonali D_{ii} rappresentano i tassi di estensione normale nelle direzioni coordinate, mentre le componenti fuori diagonale D_{ij} ($i \neq j$) rappresentano i tassi di distorsione angolare (shear rate). Il tensore W descrive invece il tasso di rotazione rigida locale. Esso può essere associato a un vettore di vorticità ω tale che $W_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\,\omega_k$, dove ε_{ijk} è il simbolo di Levi-Civita.

Per materiali incomprimibili, il vincolo $\nabla \cdot v = 0$ implica che $tr(D) = D_{ii} = 0$, cioè la somma dei tassi di estensione normali deve annullarsi. Questo significa che qualsiasi allungamento in una direzione deve essere compensato da una contrazione in direzioni ortogonali, mantenendo il volume costante.

Un concetto importante è la derivata oggettiva, che è una generalizzazione della derivata materiale che è indipendente dalla sovrapposizione di rotazioni rigide. Esistono diverse definizioni di derivate oggettive, ciascuna appropriata in contesti diversi. La derivata di Jaumann è definita come $D^J(\cdot)/Dt = D(\cdot)/Dt - W\cdot(\cdot) + (\cdot)\cdot W$, mentre la derivata di Oldroyd superiore è $D^\nabla(\cdot)/Dt = D(\cdot)/Dt - L\cdot(\cdot) - (\cdot)\cdot L^T$. Queste derivate sono utilizzate nella formulazione di leggi costitutive per materiali visco-elastici e visco-plastici in regime di deformazioni finite.

Instabilità e Biforcazioni in Deformazioni Finite

Un fenomeno importante che emerge naturalmente nella teoria delle deformazioni finite è la possibilità di instabilità materiali e di biforcazioni, dove un percorso di deformazione che era stabile diventa instabile al superamento di una soglia critica.

La condizione di stabilità materiale richiede che la matrice dei moduli incrementali, definita come $C_{ijkl} = \partial\sigma_{ij}/\partial\varepsilon_{kl}$, sia definita positiva. Questo garantisce che un incremento arbitrario di deformazione produca un incremento positivo di energia. Matematicamente, la condizione è $\delta\varepsilon_{ij} C_{ijkl} \delta\varepsilon_{kl} > 0$ per ogni $\delta\varepsilon$ non nullo. Quando questa condizione è violata, il materiale diventa instabile e possono svilupparsi localizzazioni di deformazione, come bande di taglio.

Un esempio specifico è l'instabilità di buckling in materiali iperelastici sottoposti a compressione. Consideriamo un blocco di materiale neo-hookiano sottoposto a compressione uniassiale λ lungo l'asse x_1. Quando λ scende sotto un valore critico λ_{cr}, determinato dall'annullarsi del determinante della matrice di rigidezza incrementale, il blocco può buckle improvvisamente, sviluppando una deformazione fuori piano. Il valore critico dipende dai parametri elastici e dalla geometria del blocco.

Un'altra instabilità importante è la necking in materiali sottoposti a trazione. Durante l'estensione uniassiale di una barra, inizialmente la deformazione è omogenea lungo tutta la lunghezza. Tuttavia, al raggiungimento di un carico massimo (corrispondente al punto in cui $dP/d\lambda = 0$, dove P è la forza e λ è lo stiramento), la deformazione può localizzarsi in una regione ristretta (collo), mentre il resto della barra si scarica elasticamente. Questo fenomeno è governato dal bilanciamento tra hardening del materiale (aumento della resistenza con la deformazione) e softening geometrico (riduzione dell'area di sezione trasversale).

Teoria della Plasticità in Deformazioni Finite

La plasticità si riferisce alla deformazione permanente che si accumula in un materiale quando viene caricato oltre il limite elastico. A differenza della deformazione elastica, che è completamente reversibile, la deformazione plastica è irreversibile e dissipa energia.

La formulazione della plasticità in regime di deformazioni finite richiede una decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione totale F in una parte elastica F^e e una parte plastica F^p: F = F^e F^p. Questa decomposizione, proposta da Kröner, Lee e altri, si basa sull'idea di una configurazione intermedia rilassata, ottenuta "scaricando" elasticamente il materiale dallo stato attuale. Il gradiente F^p mappa la configurazione di riferimento alla configurazione intermedia (producendo deformazione plastica permanente), mentre F^e mappa la configurazione intermedia alla configurazione attuale (deformazione elastica reversibile).

Gli sforzi sono determinati dalla parte elastica della deformazione attraverso una relazione costitutiva elastica: S = S(F^e), o equivalentemente usando il tensore elastico di Cauchy-Green C^e = (F^e)^T F^e. La parte plastica evolve secondo una legge di flusso plastico, che specifica il tasso di deformazione plastica L^p = Ḟ^p (F^p)^(-1) in funzione dello stato di sforzo e delle variabili interne.

Il criterio di snervamento definisce il limite tra deformazione puramente elastica e deformazione elastoplastica. Esso è tipicamente espresso come una funzione scalare degli sforzi f(σ, κ) ≤ 0, dove κ rappresenta variabili di hardening che evolvono con la deformazione plastica. Quando f < 0, il materiale si comporta elasticamente. Quando f = 0 e il caricamento tende ad aumentare f, si verifica flusso plastico. La condizione di consistenza richiede che f rimanga zero durante il flusso plastico: ḟ = 0.

Per materiali geologici, il criterio di Mohr-Coulomb o di Drucker-Prager sono comunemente utilizzati. Il criterio di Drucker-Prager ha la forma $f = \sqrt{(J_2)} - \alpha I_1 - k \leq 0$, dove $I_1 = tr(\sigma)$ è il primo invariante dello sforzo (pressione idrostatica moltiplicata per tre), $J_2 = (1/2)\, s_{ij}\, s_{ij}$ è il secondo invariante del tensore deviatorico degli sforzi $s = \sigma - (1/3)(tr\ \sigma)I$, e α, k sono parametri materiali legati all'angolo di attrito interno e alla coesione.

La legge di flusso plastico specifica la direzione e il tasso di flusso plastico. Per plasticità associativa, la direzione del flusso plastico è normale alla superficie di snervamento nello spazio degli sforzi: $L^p = \dot{\lambda}\, \partial f/\partial \sigma$, dove $\dot{\lambda} \geq 0$ è il moltiplicatore plastico, determinato dalla condizione di consistenza. Per plasticità non associativa, utilizzata spesso per materiali geomateriali che esibiscono dilatanza (aumento di volume durante il taglio), si introduce un potenziale plastico separato g(σ) e la legge di flusso diventa $L^p = \dot{\lambda}\, \partial g/\partial \sigma$.

Le leggi di hardening specificano come i parametri materiali (come k nel criterio di Drucker-Prager) evolvono con la deformazione plastica. L'hardening isotropo assume che la superficie di snervamento si espanda uniformemente nello spazio degli sforzi, mentre l'hardening cinematico assume che la superficie trasli senza cambiare forma. La realtà è spesso una combinazione di entrambi.

Visco-plasticità e Creep

Su scale temporali geologiche, molte rocce esibiscono comportamento visco-plastico, dove la deformazione plastica procede anche per sforzi inferiori al limite di snervamento convenzionale, ma a tassi che dipendono fortemente dalla magnitudine dello sforzo e dalla temperatura. Questo fenomeno, noto come creep, è fondamentale per la dinamica del mantello terrestre.

La legge di potenza per il creep, già menzionata nei capitoli precedenti, può essere generalizzata a deformazioni finite. In forma tensoriale, il tensore tasso di deformazione da creep è dato da D^cr = A (σ_e)^(n-1) s / (2μ), dove σ_e = √(3J₂) è lo sforzo equivalente di von Mises, s = σ - (1/3)(tr σ)I è il tensore deviatorico degli sforzi, A è un coefficiente dipendente dalla temperatura secondo un'equazione di Arrhenius A = A₀ exp(-Q/(RT)), n è l'esponente della legge di potenza, e μ è il modulo di taglio.

Per n = 1, questa legge si riduce al creep lineare o Newtoniano, dove il tasso di deformazione è proporzionale allo sforzo (comportamento viscoso). Per n > 1, il creep è non lineare e il materiale esibisce thinning (la viscosità effettiva diminuisce con l'aumento dello sforzo). Per il mantello terrestre, valori tipici sono n ≈ 3 (diffusion creep) o n ≈ 3-5 (dislocation creep), dipendentemente dal meccanismo microscopico dominante e dalle condizioni di temperatura e pressione.

La formulazione completa del creep in deformazioni finite richiede l'integrazione numerica del tensore tasso di deformazione da creep lungo il percorso di carico, tenendo conto che gli assi principali di sforzo possono ruotare durante la deformazione. Algoritmi computazionali sofisticati, basati su integrazioni implicite e tecniche di return mapping, sono stati sviluppati per gestire questa complessità.

Un raffinamento importante è l'inclusione di meccanismi multipli di creep che operano in parallelo o in serie. Per esempio, il modello composito di Ranalli per il mantello include sia diffusion creep (dominante a bassi sforzi e alta temperatura) che dislocation creep (dominante ad alti sforzi), con il tasso totale di deformazione dato dalla somma dei contributi: D^totale = D^diff + D^disl.

Danno Meccanico e Degradazione

La microfratturazione e il danneggiamento progressivo del materiale sotto carico ciclico o sostenuto è un fenomeno importante in geomeccanica, particolarmente rilevante per la stabilità di pendii, la fratturazione idraulica, e la nucleazione di terremoti.

La meccanica del danno continuo introduce variabili scalari o tensoriali di danno che quantificano la degradazione delle proprietà materiali. Un approccio semplice usa una variabile scalare di danno D ∈ [0,1], dove D = 0 corrisponde al materiale integro e D = 1 al materiale completamente danneggiato (fratturato). Le proprietà elastiche effettive sono ridotte da un fattore (1-D): per esempio, il modulo di Young effettivo diventa E_eff = (1-D)E₀.

L'evoluzione del danno è governata da una legge di evoluzione del tipo Ḋ = f(σ, D, variabili_stato), dove f è una funzione che descrive il tasso di accumulo di danno. Un modello semplice è Ḋ = B ⟨(Y - Y₀)/(Y_c - Y₀)⟩^m, dove Y è la release rate di energia elastica, Y₀ è una soglia di danno, Y_c è un valore critico, B e m sono parametri, e ⟨·⟩ denota la parte positiva.

Per rocce, il danno è spesso anisotropo, riflettendo l'orientazione preferenziale delle microfratture. Questo richiede la generalizzazione a un tensore di danno D_ij. Un modello tensoriale semplice usa D_ij = ω n_i n_j, dove ω è l'intensità scalare del danno e n è la normale alla famiglia dominante di microfratture.

L'accoppiamento tra danno e plasticità porta a modelli elastoplastici con danno, dove la deformazione plastica favorisce l'accumulo di danno e viceversa il danno riduce la resistenza plastica. Questo accoppiamento può produrre fenomeni complessi come softening localizzato e formazione di bande di taglio, che sono precursori di fratture macroscopiche.

Omogeneizzazione e Micromeccanica di Materiali Eterogenei

I materiali geologici sono intrinsecamente eterogenei, contenendo inclusioni, pori, grani con orientazioni cristallografiche diverse, e fasi minerali multiple. La teoria dell'omogeneizzazione fornisce metodi matematici per derivare proprietà effettive macroscopiche a partire dalla microstruttura dettagliata.

L'idea base è separare le scale: si assume che esista una scala microscópica caratteristica l molto minore della scala macroscopica caratteristica L, tale che l << L. Il comportamento a scala microscopica è descritto da equazioni locali con coefficienti rapidamente variabili, mentre si cerca una descrizione macroscopica omogeneizzata con coefficienti effettivi costanti.

Il metodo delle espansioni asintotiche introduce una variabile lenta X = x e una variabile veloce ξ = x/ε, dove ε = l/L << 1 è il parametro di separazione di scala. I campi fisici (sforzi, deformazioni) sono espansi in serie di potenze di ε: $u(x) = u_0(X,\xi) + \varepsilon\, u_1(X,\xi) + \varepsilon^2\, u_2(X,\xi) + ...$, dove ogni termine è periodico in ξ con periodo pari alla dimensione della cella elementare rappresentativa della microstruttura.

Sostituendo questa espansione nelle equazioni di equilibrio e raccogliendo termini dello stesso ordine in ε, si ottiene una gerarchia di problemi. Il problema di ordine zero fornisce le equazioni macroscopiche con coefficienti effettivi, mentre i problemi di ordine superiore determinano le correzioni e le fluttuazioni microscopiche.

Per compositi con inclusioni elastiche immerse in una matrice elastica, i bounds di Hashin-Shtrikman forniscono limiti rigidi per i moduli elastici effettivi in funzione delle proprietà e frazioni volumetriche dei costituenti. Per esempio, per un composito isotropo bifasico con moduli di taglio μ_1, μ_2 e frazioni volumetriche c_1, c_2, il modulo di taglio effettivo μ_eff soddisfa μ_L ≤ μ_eff ≤ μ_U, dove i bounds inferiore e superiore sono dati da espressioni che dipendono da μ_1, μ_2, c_1, c_2 e dal modulo di comprimibilità.

Il metodo dell'inclusione equivalente di Eshelby è fondamentale per calcolare le proprietà effettive. Esso si basa sulla soluzione esatta del problema di un'inclusione ellissoidale con deformazione propria (eigendeformation) ε* in un mezzo elastico infinito omogeneo. Eshelby dimostrò che la deformazione all'interno dell'inclusione è uniforme e legata alla deformazione propria da ε = S ε*, dove S è il tensore di Eshelby, che dipende solo dalla forma dell'inclusione e dalle proprietà elastiche della matrice, ma non dalla magnitudine di ε*.

Utilizzando la soluzione di Eshelby, si possono derivare schemi di omogeneizzazione auto-consistenti, dove ogni inclusione è immersa in un mezzo effettivo (da determinare auto-consistentemente) piuttosto che nella matrice pura. Questo porta a equazioni implicite per i moduli effettivi che devono essere risolte iterativamente.

Applicazioni Geofisiche della Meccanica delle Deformazioni Finite

La teoria delle deformazioni finite trova applicazioni cruciali in numerosi contesti geofisici, dove le approssimazioni lineari falliscono.

Nella tettonica delle placche, le zone di subduzione sono caratterizzate da deformazioni enormi accumulate su milioni di anni. La placca oceanica subduttante subisce flessione, stiramento e ispessimento, con stiramenti totali che possono raggiungere $\lambda \sim 2$-3 (cioè raddoppio o triplicamento dello spessore iniziale). Modellare accuratamente questi processi richiede formulazioni in deformazioni finite, specialmente quando si studia il metamorfismo associato (che dipende fortemente dalla storia di pressione e temperatura, a sua volta controllata dalla geometria deformata).

Nella dinamica del mantello, la convezione su miliardi di anni produce stiramenti cumulativi enormi. Un elemento di materiale che parte dalla regione vicino al nucleo e viene trasportato verso la superficie da un pennacchio può subire stiramenti totali $\lambda \sim 10$ o più. La storia di deformazione influenza l'orientazione preferenziale dei cristalli (lattice preferred orientation, LPO), che a sua volta produce anisotropia sismica osservabile. Modellare l'evoluzione della LPO richiede seguire la rotazione degli assi cristallografici durante la deformazione finita, tenendo conto dei meccanismi di creep attivi (slip systems dominanti).

Nella meccanica delle faglie, la zona di danneggiamento attorno a faglie mature può avere spessori di decine o centinaia di metri e aver subito deformazioni di taglio enormi ($\gamma \sim 10$-100). La struttura risultante è estremamente complessa, con una core zone ultracataclastica circondata da zone di danneggiamento progressivamente meno intenso. Modelli numerici in deformazioni finite accoppiate a evoluzione del danno possono riprodurre queste strutture osservate.

Nell'impatto di meteoriti, le rocce vicine al cratere subiscono pressioni di shock che possono raggiungere centinaia di gigapascal e deformazioni istantanee enormi. La compressione seguita da rarefazione produce strutture caratteristiche come coni di shatter e trasformazioni di fase (ad esempio quarzo $\rightarrow$ stishovite). La modellazione richiede equazioni di stato accurate per pressioni estreme e formulazioni dinamiche in deformazioni finite.

Nella glaciologia, il flusso del ghiaccio in calotte e ghiacciai produce deformazioni cumulative molto grandi su scale temporali di migliaia di anni. Il ghiaccio si comporta come un fluido viscoso non lineare (con $n \approx 3$ nella legge di potenza), e lo sviluppo di anisotropia cristallografica influenza significativamente la reologia effettiva. Modelli sofisticati accoppiano la meccanica del continuo in deformazioni finite con l'evoluzione della fabric cristallografica.

Metodi Computazionali per Deformazioni Finite

La risoluzione numerica di problemi in deformazioni finite presenta sfide computazionali significative dovute alla non linearità delle equazioni, alla possibilità di grandi distorsioni della mesh, e alla necessità di seguire la storia della deformazione.

Il metodo degli elementi finiti (FEM) è l'approccio dominante. In formulazione lagrangiana totale, la discretizzazione è effettuata sulla configurazione di riferimento, che rimane fissa. Il

sistema discretizzato è non lineare e richiede tecniche iterative (tipicamente Newton-Raphson) per la soluzione. La matrice di rigidezza tangente include contributi sia materiali (dalla legge costitutiva) che geometrici (dalla deformazione finita), ed è tipicamente non simmetrica.

In formulazione lagrangiana aggiornata, la configurazione di riferimento è aggiornata periodicamente alla configurazione attuale, riducendo le distorsioni della mesh. Questo richiede l'aggiornamento delle coordinate nodali e il push-forward o pull-back delle variabili tensoriali ad ogni incremento.

Il metodo delle differenze finite può essere usato in formulazione euleriana, dove la griglia è fissa nello spazio e il materiale fluisce attraverso di essa. Questo è particolarmente adatto per problemi di flusso con grandi deformazioni (come convezione mantellica), ma richiede tecniche di advection per trasportare le variabili materiali (come la composizione o le variabili di hardening) con il flusso.

Il metodo dei punti materiali (Material Point Method, MPM) combina vantaggi di approcci lagrangiani ed euleriani. Il continuo è discretizzato mediante punti materiali che trasportano tutte le variabili di stato, mentre il momento è risolto su una griglia euleriana fissa. Ad ogni time step, le variabili dai punti sono interpolate sulla griglia, le equazioni del moto sono risolte sulla griglia, e poi le velocità nodali sono interpolate ai punti per aggiornarli. Questo metodo gestisce naturalmente grandi distorsioni e contatto/impatto.

La stabilizzazione numerica è critica per problemi che esibiscono localizzazione o softening. Tecniche di regolarizzazione, come l'introduzione di lunghezze caratteristiche attraverso teorie del gradiente o formulazioni visco-plastiche con dipendenza dal tasso, sono necessarie per ottenere risultati mesh-independent.

L'integrazione delle leggi costitutive complesse (elastoplasticità, visco-plasticità, danno) richiede algoritmi robusti e accurati. L'approccio return mapping, dove si assume inizialmente comportamento elastico e poi si corregge per portare lo stato di sforzo sulla superficie di snervamento, è ampiamente utilizzato. Questi algoritmi devono preservare proprietà importanti come la consistenza termodinamica.

Conclusioni e Prospettive della Meccanica del Continuo in Geofisica

La meccanica del continuo in regime di deformazioni finite fornisce il quadro matematico rigoroso necessario per descrivere quantitativamente i processi deformativi che plasmano la Terra, dalle scale microscopiche della deformazione dei cristalli alle scale globali della tettonica delle placche e della convezione mantellica.

I progressi futuri richiederanno l'integrazione sempre più stretta tra teoria, esperimenti di laboratorio, osservazioni geodetiche e geofisiche, e simulazioni numeriche ad alta risoluzione. Le sfide includono lo sviluppo di leggi costitutive più realistiche che catturino l'intera gamma di comportamenti dei materiali terrestri (elastico, plastico, viscoso, con danno) su tutte le scale temporali rilevanti, dal millisecondo del passaggio di onde sismiche ai miliardi di anni dell'evoluzione planetaria.

L'accoppiamento multifisico – tra meccanica, termica, chimica e flusso di fluidi – è essenziale per modellare accuratamente processi come la generazione di magma, il metamorfismo, la fratturazione idraulica, e le interazioni fluido-roccia in zone di faglia. Questi accoppiamenti richiedono formulazioni matematiche sofisticate e algoritmi numerici avanzati.

L'omogeneizzazione multi-scala permetterà di connettere rigorosamente le proprietà microscopiche derivate da fisica dei materiali e modellazione molecolare alle proprietà macroscopiche utilizzate nei modelli geofisici su grande scala. Questo ponte tra scale ridurrà l'attuale dipendenza da parametrizzazioni empiriche e aumenterà il potere predittivo dei modelli.

Infine, lo sviluppo di tecniche di inversione che possono assimilare dati geofisici multipli (sismici, gravimetrici, magnetici, geodetici) in framework di deformazioni finite permetterà di vincolare meglio la reologia terrestre in situ e di ottenere immagini più dettagliate della deformazione attiva nel sottosuolo. Questo è cruciale per la valutazione del rischio sismico, la gestione delle risorse geotermiche, e la comprensione fondamentale della dinamica terrestre.

Propagazione Sismica - Onde Superficiali e Dispersione

Introduzione alle Onde Superficiali Sismiche

Le onde superficiali rappresentano una classe fondamentale di perturbazioni sismiche che si propagano lungo le superfici libere o le interfacce tra mezzi con proprietà elastiche diverse. A differenza delle onde di volume (onde P e S) che si propagano attraverso l'intero volume del mezzo elastico, le onde superficiali sono confinate in prossimità della superficie o dell'interfaccia e la loro ampiezza decade esponenzialmente con la profondità. Questa caratteristica le rende particolarmente importanti sia per applicazioni pratiche – essendo spesso le fasi sismiche con maggiore ampiezza nei sismogrammi registrati a grandi distanze epicentrali – sia per studi di struttura crostale e del mantello superiore, poiché la loro dispersione contiene informazioni dettagliate sulla variazione delle proprietà elastiche con la profondità.

Le onde superficiali si dividono in due categorie principali: le onde di Rayleigh, che si propagano lungo la superficie libera di un semispazio elastico o lungo l'interfaccia tra un solido e un fluido (o il vuoto), e le onde di Love, che richiedono l'esistenza di un gradiente verticale di velocità sismica, tipicamente realizzato da uno strato elastico sopra un semispazio con velocità maggiore. Entrambi i tipi di onde sono dispersive in presenza di stratificazione, cioè la loro velocità di fase dipende dalla frequenza o, equivalentemente, dalla lunghezza d'onda.

La dispersione delle onde superficiali è il fenomeno per cui componenti spettrali diverse dello stesso treno d'onde viaggiano a velocità diverse, causando un allungamento temporale del segnale con la distanza dalla sorgente. Questo fenomeno, che sarebbe un inconveniente nella comunicazione via onde radio ma costituisce un difetto trascurabile nelle onde luminose grazie alla loro bassissima dispersione nel vuoto, diventa invece uno strumento

diagnostico potentissimo in sismologia. La ragione fisica della dispersione è che onde con lunghezze d'onda diverse "sentono" porzioni diverse della struttura verticale: onde a periodo lungo (lunghezza d'onda grande) penetrano più profondamente e sono influenzate dalle proprietà elastiche a grande profondità, mentre onde a periodo corto (lunghezza d'onda piccola) rimangono confinate vicino alla superficie e sondano solo gli strati superficiali.

Le Onde di Rayleigh: Teoria Fondamentale per un Semispazio Omogeneo

Le onde di Rayleigh furono previste teoricamente da Lord Rayleigh nel 1885 in un celebre articolo sulla propagazione di onde lungo la superficie libera di un solido elastico. La loro derivazione matematica rigorosa richiede la soluzione delle equazioni dell'elastodinamica con appropriate condizioni al contorno sulla superficie libera.

Consideriamo un semispazio elastico omogeneo e isotropo che occupa la regione $z \geq 0$, dove z è la coordinata verticale misurata positiva verso il basso a partire dalla superficie libera $z = 0$. Il mezzo è caratterizzato dalla densità ρ, dal modulo di Lamé λ e dal modulo di taglio μ. Le velocità delle onde di volume sono $\alpha = \sqrt{[(\lambda + 2\mu)/\rho]}$ per le onde P e $\beta = \sqrt{(\mu/\rho)}$ per le onde S.

Il campo di spostamento u può essere decomposto, secondo il teorema di Helmholtz, in una parte irrotazionale derivante da un potenziale scalare φ e una parte solenoidale derivante da un potenziale vettoriale ψ: $u = \nabla\varphi + \nabla\times\psi$, dove si impone il gauge $\nabla\cdot\psi = 0$ per rendere la decomposizione unica. Sostituendo nell'equazione del moto $\rho\,\partial^2u/\partial t^2 = (\lambda + 2\mu)\,\nabla(\nabla\cdot u) - \mu\,\nabla\times(\nabla\times u)$ e utilizzando la decomposizione, si ottengono due equazioni d'onda disaccoppiate: $\partial^2\varphi/\partial t^2 = \alpha^2\,\nabla^2\varphi$ e $\partial^2\psi/\partial t^2 = \beta^2\,\nabla^2\psi$.

Per onde superficiali che si propagano nella direzione x con velocità di fase c, cerchiamo soluzioni della forma $\varphi(x, z, t) = \Phi(z)\exp[ik(x - ct)]$ e $\psi(x, z, t) = \Psi(z)\exp[ik(x - ct)]$, dove k è il numero d'onda. Poiché le onde di Rayleigh in un piano hanno movimento nel piano verticale contenente la direzione di propagazione (piano sagittale), possiamo limitarci alla componente $\psi_y(x, z, t) = \Psi(z)\exp[ik(x - ct)]$, con le altre componenti del potenziale vettoriale identicamente nulle.

Sostituendo queste forme nelle equazioni d'onda, otteniamo equazioni differenziali ordinarie per le ampiezze verticali: $d^2\Phi/dz^2 - k^2(1 - c^2/\alpha^2)\,\Phi = 0$ e $d^2\Psi/dz^2 - k^2(1 - c^2/\beta^2)\,\Psi = 0$. Poiché le onde superficiali devono decadere esponenzialmente per $z \to +\infty$, richiediamo che $1 - c^2/\alpha^2 > 0$ e $1 - c^2/\beta^2 > 0$, ovvero $c < \beta < \alpha$. Definendo i parametri $p = k\sqrt{(1 - c^2/\alpha^2)}$ e $q = k\sqrt{(1 - c^2/\beta^2)}$, le soluzioni che decadono sono $\Phi(z) = A\exp(-pz)$ e $\Psi(z) = B\exp(-qz)$, dove A e B sono costanti da determinare.

Le componenti di spostamento sono $u_x = \partial\varphi/\partial x + \partial\psi_y/\partial z = ik[A\exp(-pz) - qB\exp(-qz)]\exp[ik(x - ct)]$ e $u_z = \partial\varphi/\partial z - \partial\psi_y/\partial x = [-pA\exp(-pz) - ikB\exp(-qz)]\exp[ik(x - ct)]$. Le corrispondenti componenti di sforzo possono essere calcolate dalla legge di Hooke generalizzata.

La superficie $z = 0$ è libera da trazioni, quindi le componenti di sforzo σ_{zz} e σ_{xz} devono annullarsi su $z = 0$. Queste condizioni al contorno, espresse in termini di A e B, forniscono un sistema lineare omogeneo di due equazioni nelle due incognite. Per soluzioni non triviali,

il determinante del sistema deve annullarsi, fornendo l'equazione di dispersione di Rayleigh: $(2 - c^2/\beta^2)^2 = 4\sqrt{(1 - c^2/\alpha^2)}\sqrt{(1 - c^2/\beta^2)}$.

Questa è un'equazione algebrica (di sesto grado in c^2/β^2) che determina la velocità delle onde di Rayleigh c_R in funzione dei parametri elastici del mezzo. È notevole che l'equazione dipenda da α e β solo attraverso il loro rapporto, equivalentemente attraverso il coefficiente di Poisson ν definito da $\alpha/\beta = \sqrt{[2(1-\nu)/(1-2\nu)]}$. Per il caso limite incomprimibile ($\nu \to 0{,}5$, $\alpha \to \infty$), l'equazione si semplifica a $(2 - c^2/\beta^2)^2 = 4(2 - c^2/\beta^2)$, con soluzione $c_R/\beta = \sqrt{[(2 - \sqrt{2})/2]} \approx 0{,}9553$. Per materiali reali con coefficienti di Poisson nel range 0,2-0,35, il rapporto c_R/β varia tra circa 0,87 e 0,96.

Le onde di Rayleigh hanno un carattere ellittico retrogrado: particelle sulla superficie si muovono su ellissi nel piano verticale, con il moto nella direzione opposta rispetto alla direzione di propagazione dell'onda nella parte superiore dell'ellisse. L'ellitticità (rapporto tra ampiezza verticale e orizzontale) dipende dalla profondità e dai parametri elastici.

Onde di Love: Onde di Taglio Guidate da Strati

Le onde di Love furono scoperte teoricamente da Augustus Edward Hough Love nel 1911 come soluzioni dell'equazione d'onda per onde di taglio in una struttura stratificata semplice: uno strato elastico omogeneo sopra un semispazio elastico omogeneo con velocità maggiore. A differenza delle onde di Rayleigh, le onde di Love hanno movimento puramente trasversale orizzontale, perpendicolare alla direzione di propagazione.

Consideriamo uno strato elastico di spessore H, densità ρ_1 e velocità onde S β_1, sovrapposto a un semispazio con densità ρ_2 e velocità $\beta_2 > \beta_1$. Il sistema di coordinate ha origine sulla superficie libera, con z positivo verso il basso. Per onde Love che si propagano nella direzione x con velocità c, l'unico componente non nullo dello spostamento è $u_y(x, z, t)$.

Nello strato ($0 \le z \le H$), la componente u_y soddisfa l'equazione d'onda scalare: $\partial^2 u_y/\partial t^2 = \beta_1^2 \, (\partial^2 u_y/\partial x^2 + \partial^2 u_y/\partial z^2)$. Cercando soluzioni della forma $u_y = \Psi_1(z) \exp[ik(x - ct)]$, otteniamo $d^2\Psi_1/dz^2 + k_1^2 \Psi_1 = 0$, dove $k_1^2 = k^2(c^2/\beta_1^2 - 1)$. Affinché esista una soluzione oscillante nello strato, richiediamo $c > \beta_1$. La soluzione generale è $\Psi_1(z) = A \cos(k_1 z) + B \sin(k_1 z)$.

Nel semispazio ($z \ge H$), similmente si ha $d^2\Psi_2/dz^2 - q_2^2 \Psi_2 = 0$, dove $q_2^2 = k^2(1 - c^2/\beta_2^2)$. Per onde che decadono esponenzialmente in profondità, richiediamo $c < \beta_2$. La soluzione è $\Psi_2(z) = C \exp[-q_2(z - H)]$, dove abbiamo scelto l'origine di z per la decadenza esponenziale a $z = H$ per convenienza.

Le condizioni al contorno sono: (i) trazione nulla sulla superficie libera $z = 0$: $\sigma_{yz}|_{z=0} = \mu_1 \, \partial u_y/\partial z|_{z=0} = 0$, (ii) continuità dello spostamento all'interfaccia $z = H$: $\Psi_1(H) = \Psi_2(H)$, e (iii) continuità della trazione all'interfaccia: $\mu_1 \, \partial\Psi_1/\partial z|_{z=H} = \mu_2 \, \partial\Psi_2/\partial z|_{z=H}$.

La condizione (i) richiede $B = 0$, quindi $\Psi_1(z) = A \cos(k_1 z)$. Le condizioni (ii) e (iii) forniscono $A \cos(k_1 H) = C$ e $-\mu_1 A k_1 \sin(k_1 H) = -\mu_2 C q_2$. Dividendo la seconda per la prima, otteniamo l'equazione di dispersione per le onde di Love: $\mu_1 k_1 \tan(k_1 H) = \mu_2 q_2$.

Sostituendo le espressioni per k_1 e q_2 in termini di c, k, β_1, β_2, e riarrangiando, si ottiene un'equazione trascendente che deve essere risolta numericamente per c come funzione della frequenza $\omega = ck$ o del periodo $T = 2\pi/\omega$. La struttura della funzione tangente implica l'esistenza di infiniti rami di soluzioni (modi), etichettati n = 0, 1, 2, ..., ciascuno corrispondente a un modo proprio di oscillazione verticale nello strato.

Il modo fondamentale (n = 0) ha una velocità di fase che varia continuamente da $c = \beta_1$ a periodo infinito (lunghezza d'onda infinita) fino a c che si avvicina asintoticamente alla velocità di Rayleigh dello strato $\beta_R \approx 0{,}92\beta_1$ a periodo molto corto. I modi superiori ($n \geq 1$) esistono solo per frequenze superiori a frequenze di cutoff specifiche, determinate dalle condizioni $k_1 H = n\pi$, che corrispondono a risonanze costruttive nello strato.

La dispersione delle onde di Love ha importanza pratica fondamentale: misurando la velocità di fase come funzione del periodo dalle registrazioni sismiche, e invertendo la relazione di dispersione, si può determinare la struttura di velocità $\beta(z)$ in funzione della profondità. Questo metodo, sviluppato sistematicamente da Dorman, Ewing e Oliver negli anni sessanta, è alla base della maggior parte delle determinazioni della struttura crostale.

La Velocità di Gruppo e il Trasporto di Energia

Un concetto fondamentale nella teoria delle onde dispersive è la distinzione tra velocità di fase $c(\omega) = \omega/k(\omega)$, che è la velocità di propagazione delle creste e dei ventri del treno d'onde monocromatico, e la velocità di gruppo $U(\omega) = d\omega/dk$, che è la velocità di propagazione dell'inviluppo di un pacchetto d'onde ristretto in frequenza. La velocità di gruppo rappresenta anche la velocità di trasporto dell'energia per onde lineari.

Per derivare questa importante relazione, consideriamo un pacchetto d'onde formato dalla sovrapposizione di onde piane con frequenze vicine a una frequenza centrale ω_0. Il campo di spostamento può essere scritto come $u(x,t) = \int A(\omega) \exp[i(k(\omega)x - \omega t)]\, d\omega$, dove $A(\omega)$ è una funzione di ampiezza piccata attorno a ω_0. Espandendo $k(\omega)$ in serie di Taylor attorno a ω_0: $k(\omega) \approx k_0 + (dk/d\omega)|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$, e integrando, si trova che l'inviluppo del pacchetto si muove con velocità $U = 1/(dk/d\omega) = d\omega/dk$.

Per onde di Rayleigh e Love, la relazione tra velocità di fase e velocità di gruppo dipende dalla derivata $dc/d\omega$ (dispersione). Se c aumenta con ω (dispersione normale, $dc/d\omega > 0$), allora $U < c$: l'inviluppo viaggia più lentamente delle creste. Se c diminuisce con ω (dispersione anomala, $dc/d\omega < 0$), allora $U > c$. Per onde superficiali in strutture crostali tipiche, la dispersione è normale a periodi brevi e diventa anomala a periodi lunghi corrispondenti a profondità di penetrazione che raggiungono il mantello superiore.

La relazione esatta tra U e c si ottiene differenziando la relazione $\omega = kc$ rispetto a k: $d\omega/dk = c + k\, dc/dk$. Poiché $k = \omega/c$, abbiamo $dc/dk = (dc/d\omega)(d\omega/dk) = (dc/d\omega)U$, quindi $U = c + k(dc/d\omega)U$, che si risolve in $U = c + \omega\, dc/d\omega = c[1 + (\omega/c)\, dc/d\omega] = c - \lambda\, dc/d\lambda$, dove $\lambda = 2\pi/k$ è la lunghezza d'onda. Quest'ultima forma mostra chiaramente che se c cresce con crescente λ (dispersione tipica per onde superficiali), allora $dc/d\lambda > 0$ e quindi $U < c$.

Nei sismogrammi reali, le onde superficiali appaiono come treni d'onde allungati temporalmente, con i periodi lunghi che arrivano prima (perché hanno velocità di gruppo maggiore nelle strutture terrestri tipiche) e i periodi corti che arrivano dopo. Questo

fenomeno, chiamato dispersione normale, è immediatamente riconoscibile nei sismogrammi di terremoti lontani: dopo le onde di volume P e S, si osserva un lungo treno ondulatorio con ampiezza modulata che mostra chiaramente periodi crescenti verso la fine del sismogramma.

Metodi di Analisi della Dispersione

La determinazione sperimentale delle curve di dispersione (velocità di fase o di gruppo come funzione del periodo) da registrazioni sismiche è un problema centrale in sismologia osservativa. Esistono diversi metodi, ciascuno con vantaggi e limitazioni.

Il metodo del filtro multiplo (multiple filter technique, MFT), sviluppato da Dziewonski, Bloch e Landisman, filtra il sismogramma in bande strette di frequenza centrate su frequenze successive ω_1, ω_2, ..., ω_N. Per ciascuna componente filtrata, si identifica il tempo t_j di massima ampiezza dell'inviluppo, che corrisponde all'arrivo del gruppo centrato su ω_j. La velocità di gruppo è allora $U(\omega_j) = \Delta/t_j$, dove Δ è la distanza epicentrale. Questo metodo è robusto e funziona bene per segnali con buon rapporto segnale/rumore, ma ha risoluzione limitata in frequenza per la necessità di usare filtri con banda finita.

Il metodo della trasformata tempofrequenza (time-frequency analysis), basato su trasformate wavelets o su rappresentazioni di Wigner-Ville, fornisce una mappa bidimensionale dell'energia nel piano tempo-frequenza. I massimi di questa mappa tracciano la dispersione direttamente. La trasformata wavelet continua del segnale $s(t)$ è $W(a, b) = \int s(t)\, \psi^*[(t - b)/a]\, dt / \sqrt{a}$, dove $\psi(t)$ è una funzione wavelet madre, a è il fattore di scala (inversamente proporzionale alla frequenza), b è la traslazione temporale, e l'asterisco denota coniugazione complessa. Wavelet popolari includono la Morlet $\psi(t) = \exp(i\omega_0 t) \exp(-t^2/2)$, che fornisce buona localizzazione sia in tempo che in frequenza.

Il metodo della correlazione di fase (phase-match filtering), proposto da Herrin e Goforth, confronta la fase del sismogramma filtrato con la fase prevista per un'onda con velocità di gruppo specifica. Massimizzando la correlazione, si determina la velocità di gruppo per ciascuna frequenza. Questo metodo è particolarmente robusto contro il rumore casuale.

Il metodo dell'inversione della forma d'onda (waveform inversion) tratta la determinazione della dispersione come un problema inverso: si parametrizza la struttura di velocità in profondità, si calcolano i sismogrammi sintetici (inclusa la dispersione), e si minimizza la differenza tra sintetici e osservati. Questo approccio è più complesso computazionalmente ma permette di estrarre informazione ottimale dai dati, specialmente quando sono disponibili componenti multiple (verticale e orizzontali) che contengono sia onde di Rayleigh che di Love.

Modi Superiori e Struttura Complessa

Finora abbiamo discusso principalmente il modo fondamentale delle onde superficiali, ma in generale esistono infiniti modi superiori, ciascuno con la propria curva di dispersione. Questi modi sono soluzioni della stessa equazione d'onda con diverse condizioni di risonanza verticale.

Per un sistema con N strati sopra un semispazio, il modo di ordine n (n = 0, 1, 2, ...) ha n zeri (nodi) nella funzione eigenfunction verticale. Il modo fondamentale n = 0 non ha nodi nella parte solida (può avere un nodo nell'atmosfera se si considera accoppiamento atmosfera-terra). Il primo modo superiore n = 1 ha un nodo, tipicamente localizzato nella crosta inferiore o al top del mantello superiore. Modi superiori con n grande hanno molti nodi e "sentono" la struttura profonda in modo diverso rispetto al modo fondamentale.

L'eccitazione relativa dei diversi modi dipende dalla profondità focale del terremoto e dal meccanismo focale (orientazione della faglia). Terremoti superficiali (profondità < 50 km) eccitano fortemente il modo fondamentale, mentre terremoti profondi (profondità > 100 km) possono eccitare preferenzialmente modi superiori. L'analisi dei modi superiori fornisce vincoli addizionali sulla struttura, specialmente a grandi profondità nel mantello superiore dove il modo fondamentale ha sensibilità limitata.

La separazione e identificazione dei modi superiori è complicata perché le loro curve di dispersione possono intersecarsi o avvicinarsi (mode kissing), e i loro treni d'onde possono sovrapporsi temporalmente nel sismogramma. Tecniche avanzate come l'analisi del vettore polarizzazione (che differisce tra modi) o l'inversione simultanea di sismogrammi a distanze multiple possono aiutare a disambiguare i modi.

Teoria del Raggio per Onde Superficiali: Approssimazione JWKB

Per strutture della Terra realistiche, con variazioni continue e graduali delle proprietà elastiche con la profondità, non è possibile ottenere soluzioni analitiche esatte delle equazioni d'onda. L'approssimazione JWKB (Jeffreys-Wentzel-Kramers-Brillouin), nota anche come metodo della fase stazionaria o approssimazione asintotica, fornisce soluzioni approssimate valide quando le variazioni spaziali delle proprietà del mezzo sono lente rispetto alla lunghezza d'onda.

L'idea fondamentale è cercare soluzioni della forma $u(z, x, t) = A(z) \exp[i(kx - \omega t + \int_0^z \kappa(z') dz')]$, dove $A(z)$ è un'ampiezza che varia lentamente e $\kappa(z)$ è un numero d'onda verticale locale che deve essere determinato. Sostituendo nell'equazione d'onda e trascurando termini proporzionali a d^2A/dz^2 rispetto a termini con $(\kappa A)^2$, si ottiene un'equazione algebrica per $\kappa(z)$.

Per onde di Rayleigh in un semispazio con velocità $\beta(z)$ variabile, il numero d'onda verticale all'ordine zero è $\kappa(z) = k\sqrt{[1 - c^2/\beta^2(z)]}$, che è reale (oscillazione) per z dove $c < \beta(z)$ e immaginario (decadimento esponenziale) per z dove $c > \beta(z)$. Il punto di ritorno z_t dove $c = \beta(z_t)$ segna la transizione tra questi regimi e rappresenta la profondità massima di penetrazione dell'onda a questa frequenza.

La condizione di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld, derivata dall'approssimazione JWKB con condizioni al contorno appropriate, fornisce la relazione di dispersione: $\int_0^{z_t} \kappa(z) dz = (n + 1/4)\pi$, dove n = 0, 1, 2, ... è il numero di modo. Questa condizione ha un'interpretazione fisica elegante: l'onda deve accumulare un numero intero più un quarto di lunghezze d'onda verticali tra la superficie e il punto di ritorno per avere interferenza costruttiva.

Questa teoria fornisce un metodo semi-analitico potente per calcolare la dispersione per strutture arbitrarie $\beta(z)$, evitando la necessità di risolvere numericamente le equazioni

differenziali complete. È particolarmente utile per inversioni rapide dove si devono calcolare molte curve di dispersione sintetiche per diversi modelli di velocità.

Anisotropia e Onde Superficiali: Polarizzazione Anomala

La presenza di anisotropia sismica, cioè dipendenza delle velocità delle onde dalla direzione di propagazione, introduce complessità ulteriori nella propagazione delle onde superficiali. L'anisotropia può derivare da allineamento preferenziale di cristalli (lattice preferred orientation, LPO) nel mantello superiore, da orientazione preferenziale di fratture nella crosta, o da stratificazione fine su scale minori della lunghezza d'onda.

Per un mezzo trasversalmente isotropo con asse di simmetria verticale (VTI, Vertical Transverse Isotropy), le onde superficiali che si propagano orizzontalmente in direzioni diverse sperimentano le stesse velocità (isotropia azimutale), ma le velocità delle onde di Rayleigh e Love differiscono da quelle di un mezzo isotropo equivalente. Inoltre, le onde di Rayleigh hanno polarizzazione ellittica modificata.

Per un mezzo trasversalmente isotropo con asse di simmetria orizzontale (HTI, Horizontal Transverse Isotropy), o più generalmente per anisotropia azimutale, la velocità delle onde superficiali dipende dalla direzione di propagazione azimutale φ. Questa dipendenza è tipicamente espansa in serie di Fourier: $c(\omega, \varphi) = c_0(\omega) + c_2(\omega)\cos(2\varphi) + c_4(\omega)\cos(4\varphi) + s_2(\omega)\sin(2\varphi) + s_4(\omega)\sin(4\varphi) + \ldots$, dove i coefficienti c_0, c_2, c_4, s_2, s_4 dipendono dalla frequenza.

Il termine dominante di anisotropia è tipicamente 2φ (simmetria azimutale a due lobi), che riflette l'allineamento preferenziale di olivina (il minerale dominante nel mantello superiore) con orientazione degli assi cristallografici controllata dal flusso del mantello. Misure di anisotropia azimutale da onde superficiali forniscono vincoli importanti sulla direzione del flusso mantellico e quindi sulla dinamica della convezione.

Un fenomeno sorprendente in mezzi anisotropi è la possibilità di quasi-onde Love e quasi-onde Rayleigh, che hanno polarizzazione ibrida: le quasi-Love hanno componenti verticali piccole ma non nulle, mentre le quasi-Rayleigh hanno componenti trasversali. Questo accoppiamento tra i modi richiede l'inversione simultanea di componenti sismiche multiple per estrarre correttamente l'anisotropia.

Attenuazione Anelastica e Dispersione Intrinseca

Finora abbiamo assunto che il mezzo sia perfettamente elastico, ma in realtà tutti i materiali terrestri dissipano energia per attrito interno quando attraversati da onde sismiche. Questa attenuazione anelastica è quantificata dal fattore di qualità Q, definito come $Q = 2\pi$ (energia_immagazzinata / energia_dissipata_per_ciclo).

L'attenuazione ha due effetti principali sulle onde superficiali: (i) diminuzione dell'ampiezza con la distanza oltre quella prevista dalla divergenza geometrica, e (ii) dispersione intrinseca, cioè dipendenza della velocità dalla frequenza anche in mezzi omogenei. Quest'ultima è conseguenza diretta delle relazioni di Kramers-Kronig, che collegano le parti reale e immaginaria della rigidità complessa.

Per un materiale anelastico standard lineare, la rigidità complessa ha la forma $\mu^* = \mu_R[1 + (1/\pi Q) \ln(\omega/\omega_r) + i/(2Q)]$, dove μ_R è il modulo di rigidezza a una frequenza di riferimento ω_r. La parte reale mostra che la velocità aumenta logaritmicamente con la frequenza per Q finito. Questa dispersione intrinseca è relativamente debole (pochi percento su un decennio di frequenza per Q ~ 100-200 tipico del mantello superiore) ma può essere significativa quando si interpretano curve di dispersione molto precise.

La dipendenza di Q dalla frequenza è ancora dibattuta. Modelli semplici assumono Q costante (indipendente dalla frequenza), ma evidenze sperimentali e teoriche suggeriscono che Q potrebbe aumentare debolmente con la frequenza, specialmente a periodi lunghi corrispondenti a meccanismi di dissipazione che operano su scale temporali geologiche. Questa questione ha implicazioni per l'interpretazione della viscosità del mantello da osservazioni geodetiche (che sondano frequenze estremamente basse) e sismiche (frequenze molto più alte).

Sorgenti Sismiche e Spettri di Eccitazione

L'ampiezza osservata delle onde superficiali dipende non solo dalla struttura attraversata e dall'attenuazione, ma anche dallo spettro di eccitazione della sorgente sismica. Un terremoto può essere modellato, in prima approssimazione, come una dislocazione istantanea su una superficie di faglia, descritta dal tensore momento sismico M_{ij}.

Per una sorgente puntiforme a profondità h, lo spettro di ampiezza delle onde di Rayleigh (modo fondamentale) a frequenza ω è proporzionale a $M_0\, \omega^2\, E_R(\omega, h) / c_R(\omega)^{(5/2)}$, dove M_0 è il momento scalare, E_R è la funzione di eccitazione che dipende dalla profondità focale e dal meccanismo focale, e il fattore $c_R^{(-5/2)}$ deriva dalla divergenza geometrica cilindrica per onde superficiali.

La funzione di eccitazione $E_R(\omega, h)$ ha una struttura oscillante con la profondità, con massimi e minimi dovuti all'interferenza tra le onde generate direttamente dalla sorgente e quelle riflesse dalla superficie libera. Per terremoti superficiali ($h < 50$ km), E_R è generalmente grande a tutti i periodi di interesse. Per terremoti profondi ($h > 200$ km), E_R ha nodi a certi periodi dove l'eccitazione è fortemente soppressa, e modi superiori possono diventare dominanti.

La dipendenza ω^2 nello spettro di ampiezza (equivalentemente $T^{(-2)}$ dove T è il periodo) significa che, a parità di momento sismico, terremoti "lenti" con durata lunga (caratterizzati da basse frequenze angolari $\omega_c = 2\pi f_c$ dove lo spettro comincia a decadere) eccitano preferenzialmente onde superficiali a periodo lungo, mentre terremoti "veloci" con rottura rapida eccitano periodi corti. Questa dipendenza è alla base dell'uso delle onde superficiali per determinare la magnitudo momento $M_w = (2/3)[\log_{10}(M_0) - 9{,}1]$, dove M_0 è in newton-metri.

Inversione per Struttura Crostale e Mantellica

L'obiettivo finale dell'analisi delle onde superficiali è determinare la struttura delle velocità sismiche $\beta(z)$, $\alpha(z)$ e della densità $\rho(z)$ in funzione della profondità. Questo è un problema inverso non lineare: dato un insieme di curve di dispersione osservate (velocità di fase e/o di

gruppo per onde di Rayleigh e Love a vari periodi), trovare il modello di struttura che le spiega.

Il problema diretto consiste nel calcolare le curve di dispersione per un dato modello di struttura. Per strutture stratificate, questo può essere fatto risolvendo il sistema di equazioni differenziali ordinarie per le eigenfunctions verticali con appropriate condizioni al contorno, poi determinando le frequenze proprie che soddisfano queste condizioni. Il metodo della matrice di propagazione, dove si moltiplica matrici 4×4 che descrivono la propagazione attraverso ciascuno strato, è efficiente e numericamente stabile se implementato correttamente.

Il problema inverso è mal posto: curve di dispersione finite e rumorose non determinano univocamente la struttura, e piccole variazioni nei dati possono portare a grandi variazioni nei modelli inferiti. Per ottenere soluzioni stabili e significative, si introduce regolarizzazione. L'approccio bayesiano parametrizza il modello in termini di un numero finito di parametri (ad esempio, velocità e spessori di strati), specifica una distribuzione a priori che incorpora conoscenza geologica, e campiona la distribuzione a posteriori usando metodi Monte Carlo a catena di Markov (MCMC) per caratterizzare l'incertezza.

L'approccio di inversione linearizzata parte da un modello iniziale, calcola la dispersione sintetica, linearizza la relazione tra perturbazioni del modello e perturbazioni della dispersione, e risolve iterativamente per il modello che minimizza una funzione obiettivo. La matrice dei kernel di sensibilità (derivate parziali della velocità di fase rispetto ai parametri del modello) può essere calcolata semi-analiticamente usando il metodo variazionale, che esprime le perturbazioni della dispersione come integrali pesati delle perturbazioni della velocità.

I kernel di sensibilità mostrano che la sensibilità delle onde superficiali alla struttura varia con la profondità in modo complesso. Per onde di Rayleigh, il kernel ha tipicamente un massimo a profondità circa uguale a metà della lunghezza d'onda, con decadimento verso la superficie e verso profondità maggiori. Per onde di Love, il kernel è più concentrato vicino alla superficie. Combinando inversioni di Rayleigh e Love a molteplici periodi, si ottiene risoluzione verticale variabile: eccellente (pochi chilometri) nella crosta superiore per periodi corti, moderata (decine di chilometri) nel mantello superiore per periodi intermedi.

Tomografia Sismica con Onde Superficiali

Le misure di dispersione da migliaia di coppie stazione-terremoto possono essere combinate per costruire mappe tridimensionali delle anomalie di velocità sismica. Questo approccio, chiamato tomografia con onde superficiali, ha rivoluzionato la nostra comprensione della struttura crostale e del mantello superiore a scala globale e regionale.

Il problema tomografico può essere formulato come segue. Per ciascuna coppia sorgente-ricevitore i, si misura il tempo di percorrenza t_i^obs a periodo T. Questo tempo dipende dall'integrale della lentezza (reciproco della velocità) lungo il percorso del grande cerchio: t_i = ∫_{path} ds/c(s, T), dove c(s, T) è la velocità di fase locale a periodo T. Parametrizzando la Terra in celle (voxel) e assumendo c costante in ciascuna cella, si ottiene un sistema lineare t_i = Σ_j A_ij δc_j, dove δc_j è l'anomalia di velocità nella cella j e A_ij è la lunghezza del percorso i che attraversa la cella j.

Questo sistema è tipicamente enormemente sottodeterminato (milioni di celle, migliaia di osservazioni) e mal condizionato. La regolarizzazione mediante smoothing spaziale o damping è essenziale. Si minimizza una funzione obiettivo della forma $\Phi = ||A\delta c - t||^2 + \lambda ||L\delta c||^2$, dove L è un operatore di smoothing (tipicamente un'approssimazione discreta del Laplaciano) e λ è il parametro di regolarizzazione che bilancia fit dei dati e liscezza del modello.

Le mappe tomografiche globali mostrano correlazioni forti tra anomalie di velocità e tettonica. Le placche oceaniche vecchie e fredde appaiono come anomalie ad alta velocità (positive), mentre dorsali oceaniche e zone di hotspot vulcanico appaiono come anomalie a bassa velocità (negative). Nel mantello superiore, zone di subduzione appaiono come anomalie ad alta velocità che si estendono a profondità di centinaia di chilometri, mentre pennacchi del mantello appaiono come anomalie a bassa velocità colonnari che risalgono dalle profondità.

Tomografie regionali ad alta risoluzione, utilizzando dati da reti dense di stazioni, rivelano strutture fini come le radici crostali di catene montuose, bacini sedimentari, zone di rift, e faglie attive. Queste immagini sono cruciali per valutare il rischio sismico, esplorare risorse naturali, e comprendere processi tettonici attivi.

Accoppiamento Solido-Fluido e Onde Stoneley

Alle interfacce tra solidi e fluidi (o solidi molto morbidi che si comportano quasi come fluidi), possono propagarsi onde superficiali di tipo particolare chiamate onde di Stoneley. Queste onde sono importanti in contesti come l'interfaccia crosta-oceano, dove controllano l'accoppiamento acustico-sismico.

Consideriamo l'interfaccia piana $z = 0$ tra un fluido ($z < 0$) con densità ρ_f e velocità del suono c_f, e un solido elastico ($z > 0$) con densità ρ_s, velocità onde P α e onde S β. Nel fluido, l'onda è puramente acustica con potenziale φ_f soddisfacente $\partial^2\varphi_f/\partial t^2 = c_f^2 \nabla^2\varphi_f$. Nel solido, abbiamo sia potenziale scalare φ_s che vettoriale ψ_s come per le onde di Rayleigh.

Le condizioni al contorno all'interfaccia sono: (i) continuità dello spostamento verticale u_z, (ii) continuità della pressione $p = \sigma_{zz}$, e (iii) sforzo di taglio nullo $\sigma_{xz} = 0$ (il fluido non sostiene sforzi di taglio). Cercando soluzioni con decadimento esponenziale lontano dall'interfaccia, si ottiene un'equazione di dispersione che determina la velocità delle onde di Stoneley c_St.

Un risultato importante è che le onde di Stoneley esistono solo se $c_f < \beta$, cioè se la velocità acustica nel fluido è minore della velocità onde S nel solido. Per l'interfaccia acqua-basalto, dove $c_f \approx 1{,}5$ km/s e $\beta \approx 3{,}5$ km/s, le onde di Stoneley esistono con velocità c_St leggermente inferiore a c_f. Queste onde sono responsabili del caratteristico "ringing" a bassa frequenza osservato su idrofoni dopo terremoti sottomarini.

L'accoppiamento fluido-solido è anche importante per onde sismiche che si propagano in sedimenti saturi di fluido (acqua o idrocarburi). In questo caso, la teoria della poroelasticità di Biot predice l'esistenza di due tipi di onde P (onda rapida e onda lenta) e un'onda S, con

velocità e attenuazione fortemente dipendenti dalla frequenza. Questo è rilevante per prospezione sismica marina e per caratterizzazione di reservoir petroliferi.

Onde Superficiali su Pianeti e Lune

Le onde superficiali non sono peculiari della Terra ma si osservano (o si prevede teoricamente si debbano osservare) su tutti i corpi planetari con superfici solide. Le loro caratteristiche riflettono le differenze nella struttura interna, gravità, temperatura e composizione.

Sulla Luna, onde superficiali furono registrate dai sismometri delle missioni Apollo. La loro dispersione rivelò una crosta spessa circa cinquanta chilometri (molto più spessa della crosta terrestre) e un mantello con velocità relativamente alte, consistenti con composizione ultramafiche povere di ferro. L'attenuazione estremamente forte (Q ~ 5000-10000 nella crosta lunare, molto maggiore di Q ~ 200-600 terrestre) riflette l'assenza di acqua e la microfratturazione intensa da impatti meteoritici.

Su Marte, il lander InSight ha registrato per la prima volta onde superficiali da terremoti marziani (marsquakes). La dispersione di queste onde ha permesso di vincolare lo spessore crostale medio (~50 km), la presenza di una zona a bassa velocità nel mantello superiore (possibilmente dovuta a fusione parziale residua), e le dimensioni del nucleo liquido. La gravità marziana (g_Mars ≈ 0,38 g_Earth) influenza le velocità delle onde superficiali attraverso la dipendenza pressione-velocità.

Sui giganti ghiacciati come Europa (luna di Giove) o Encelado (luna di Saturno), si prevede teoricamente che potrebbero esistere onde superficiali che si propagano lungo l'interfaccia tra la crosta di ghiaccio e l'oceano subsuperficiale. La dispersione di queste onde, se fossero osservabili da futuri lander, potrebbe determinare univocamente lo spessore della crosta ghiacciata e le proprietà dell'oceano, informazioni cruciali per l'abitabilità.

Applicazioni Ingegneristiche: Microzonazione Sismica

A scale locali (chilometri o meno), le onde superficiali sono strumenti potenti per caratterizzare i primi cento metri del sottosuolo, rilevanti per ingegneria sismica e geotecnica. La tecnica MASW (Multichannel Analysis of Surface Waves) utilizza array lineari di geofoni che registrano onde superficiali generate da sorgenti artificiali (caduta di peso, vibroseis) o naturali (microtremori).

Il metodo consiste in tre fasi: (i) acquisizione di registrazioni multi-canale, (ii) estrazione delle curve di dispersione mediante trasformata frequenza-numero d'onda o altre tecniche di array processing, e (iii) inversione per ottenere il profilo di velocità V_S(z) nei primi decine di metri. Questo profilo è fondamentale per determinare la risposta di sito sismica, cioè l'amplificazione delle onde sismiche dovuta a terreni soffici sopra roccia rigida.

La velocità media delle onde S nei primi trenta metri, denotata V_S30 = 30 / ∫₀^{30} dz/V_S(z), è utilizzata nei codici sismici internazionali per classificare i siti in categorie (da A "roccia rigida" a E "terreni molto soffici") e determinare i fattori di amplificazione da applicare allo spettro di risposta sismico di progetto. Siti con V_S30 < 180 m/s possono sperimentare amplificazioni di fattore cinque o più, drammaticamente aumentando il rischio sismico.

Un fenomeno rilevante è la risonanza di sito, che avviene quando la frequenza dominante delle onde sismiche in arrivo corrisponde alla frequenza fondamentale di vibrazione dello strato di terreno. Questa frequenza è approssimativamente f_0 ≈ V_S / (4H), dove H è lo spessore dello strato soffice. Per uno strato di dieci metri con V_S = 200 m/s, f_0 ≈ 5 Hz, che è nella banda di frequenza dove molti edifici di media altezza hanno le loro frequenze proprie, creando potenziale per risonanza suolo-struttura distruttiva.

Geodinamica Profonda - Convezione Mantellica e Plume

Introduzione alla Convezione nel Mantello Terrestre

Il mantello terrestre, che si estende dalla base della crosta a circa trentacinque chilometri di profondità fino al confine con il nucleo a duemilaottocentonovantuno chilometri, costituisce circa l'ottantaquattro per cento del volume del pianeta e il sessantasette per cento della sua massa. Sebbene sia solido su scale temporali brevi, come dimostrato dalla propagazione delle onde sismiche di taglio, il mantello si comporta come un fluido viscoso estremamente lento su scale temporali geologiche di milioni di anni. Questo comportamento apparentemente paradossale è la chiave per comprendere la dinamica interna della Terra.

Il motore fondamentale della convezione mantellica è il trasferimento di calore dall'interno caldo del pianeta verso la superficie più fredda. Il mantello riceve calore dal nucleo sottostante, che ha una temperatura di circa cinquemilacinquecento kelvin al confine nucleo-mantello, e dal decadimento radioattivo di isotopi a lunga vita come uranio duecentotrentotto, torio duecentotrentadue e potassio quaranta distribuiti nel suo volume. Questo calore deve essere trasportato verso la superficie, dove viene irradiato nello spazio. Quando il gradiente termico supera una soglia critica, il trasporto per sola conduzione diventa instabile e si instaura la convezione, un processo molto più efficiente dove il materiale caldo sale fisicamente verso la superficie mentre il materiale freddo scende verso le profondità.

La convezione mantellica è responsabile della tettonica delle placche, il processo attraverso cui la superficie terrestre è continuamente riciclata. Le placche litosferiche fredde e rigide rappresentano lo strato limite termico superiore delle celle convettive nel mantello. Dove le placche divergono alle dorsali oceaniche, materiale mantellico caldo risale e si fonde parzialmente, creando nuova crosta oceanica. Dove le placche convergono nelle zone di subduzione, la litosfera oceanica fredda e densa affonda nel mantello, guidando la circolazione convettiva. La geometria e la dinamica di questo sistema sono controllate da un delicato equilibrio tra forze di galleggiamento termico, resistenza viscosa, e trasformazioni di fase mineralogiche.

Le Equazioni Fondamentali della Convezione Termica

La descrizione matematica della convezione nel mantello richiede l'accoppiamento tra le equazioni del moto per un fluido viscoso e l'equazione del trasporto di calore. In approssimazione di Boussinesq, dove si assume che le variazioni di densità siano importanti

solo nel termine di galleggiamento ma trascurabili altrove, le equazioni sono particolarmente eleganti.

L'equazione di conservazione della massa per un fluido incomprimibile è semplicemente la condizione di solenoidalità del campo di velocità: $\nabla \cdot v = 0$, che esprime il fatto che la divergenza della velocità è nulla ovunque. Questa equazione implica che il volume di ogni elemento fluido rimane costante durante il moto, anche se la sua forma può cambiare arbitrariamente.

L'equazione di conservazione della quantità di moto, in assenza di forze inerziali (approssimazione di Stokes, valida quando il numero di Reynolds è molto piccolo), ha la forma: $0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 v + \rho g$, dove p è la pressione dinamica (deviazione dalla pressione idrostatica di riferimento), η è la viscosità dinamica, v è il campo di velocità, ρ è la densità e g è l'accelerazione di gravità. Il termine inerziale $\rho(\partial v/\partial t + v \cdot \nabla v)$ è trascurato perché, per i flussi mantellici estremamente lenti (velocità tipiche di pochi centimetri per anno), il numero di Reynolds $Re = \rho UL/\eta$ è dell'ordine di dieci alla meno venti, enormemente inferiore all'unità.

La densità dipende dalla temperatura secondo la relazione di stato linearizzata $\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$, dove ρ_0 è la densità di riferimento a temperatura T_0 e α è il coefficiente di espansione termica volumetrica, tipicamente dell'ordine di tre per dieci alla meno cinque kelvin alla meno uno per il mantello superiore. Sostituendo questa espressione nell'equazione del moto, otteniamo: $0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 v + \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]g \approx -\nabla p + \eta \nabla^2 v - \rho_0 \alpha \Delta T g$, dove $\Delta T = T - T_0$ è l'anomalia di temperatura e nell'ultimo passaggio abbiamo assorbito il termine idrostatico $\rho_0 g$ nel gradiente di pressione.

L'equazione di conservazione dell'energia, che descrive l'evoluzione della temperatura, ha la forma: $\rho_0 c_p(\partial T/\partial t + v \cdot \nabla T) = k \nabla^2 T + Q$, dove c_p è il calore specifico a pressione costante, k è la conduttività termica, e Q rappresenta la generazione interna di calore per decadimento radioattivo. Il termine a sinistra rappresenta il tasso di variazione della temperatura seguendo il fluido (derivata materiale), mentre i termini a destra rappresentano rispettivamente la diffusione termica e le sorgenti interne.

Queste equazioni possono essere rese adimensionali introducendo scale caratteristiche per le varie quantità: una scala di lunghezza L (tipicamente lo spessore del mantello), una scala di temperatura ΔT (la differenza di temperatura tra fondo e superficie), una scala di tempo $\tau = L^2/\kappa$ dove $\kappa = k/(\rho_0 c_p)$ è la diffusività termica, e una scala di velocità $U = \kappa/L$. Il sistema adimensionalizzato rivela che la dinamica è controllata da un parametro fondamentale: il numero di Rayleigh $Ra = (\rho_0 g \alpha \Delta T L^3)/(\eta \kappa)$, che rappresenta il rapporto tra le forze di galleggiamento che guidano la convezione e le forze viscose e diffusive che la ostacolano.

L'Instabilità di Rayleigh-Bénard: Teoria Lineare

Il problema classico di Rayleigh-Bénard considera uno strato fluido orizzontale di spessore h, riscaldato dal basso e raffreddato dall'alto, con temperatura T_1 alla base e $T_0 < T_1$ alla superficie. Nella configurazione stazionaria puramente conduttiva, il profilo di temperatura è lineare: $T_{cond}(z) = T_0 + (T_1 - T_0)(1 - z/h)$, dove z è misurato verso l'alto dalla base.

Lord Rayleigh nel 1916 pose la domanda fondamentale: per quali valori dei parametri questa soluzione conduttiva diventa instabile, lasciando spazio alla convezione? La risposta richiede l'analisi di stabilità lineare: si perturbano leggermente tutte le variabili (temperatura, velocità, pressione) attorno allo stato conduttivo e si linearizzano le equazioni, ottenendo un sistema lineare per le perturbazioni.

Scrivendo $T = T_{cond} + \theta$, $v = \delta v$, $p = p_{cond} + \delta p$, dove θ, δv, δp sono perturbazioni piccole, e sostituendo nelle equazioni complete, si ottiene (trascurando termini quadratici nelle perturbazioni): $\nabla \cdot \delta v = 0$, $0 = -\nabla(\delta p) + \eta \nabla^2(\delta v) - \rho_0 \alpha \theta g$, $\partial\theta/\partial t + (\delta v)_z \, dT_{cond}/dz = \kappa \nabla^2 \theta$, dove $(\delta v)_z$ è la componente verticale della velocità perturbata.

Per uno strato infinito in estensione orizzontale (approssimazione valida quando le dimensioni orizzontali sono molto maggiori dello spessore), si cercano soluzioni nella forma di modi normali: $\theta(x, y, z, t) = \Theta(z) \exp(ik_x x + ik_y y + \sigma t)$, e similmente per le componenti di velocità e pressione, dove k_x e k_y sono i numeri d'onda orizzontali e σ è il tasso di crescita (se $\mathrm{Re}(\sigma) > 0$ la perturbazione cresce esponenzialmente e il sistema è instabile; se $\mathrm{Re}(\sigma) < 0$ decade e il sistema è stabile).

Con condizioni al contorno rigide (velocità nulla) e isoterme (temperatura fissata) su entrambe le superfici $z = 0$ e $z = h$, le equazioni si riducono a un problema agli autovalori per $\Theta(z)$. La soluzione più instabile (quella con σ massimo) determina la soglia di instabilità. Il risultato celebre di Rayleigh è che la convezione inizia quando il numero di Rayleigh supera un valore critico $Ra_c = 1670{,}8$ circa, con un numero d'onda critico $k_c h = 3{,}117$.

Questo significa che esiste una lunghezza d'onda orizzontale preferita $\lambda_c = 2\pi h/k_c \approx$ due h per le celle convettive incipient. Fisicamente, questo riflette un compromesso: celle piccole (lunghezza d'onda corta) hanno forte attrito viscoso alle pareti laterali, mentre celle grandi (lunghezza d'onda lunga) hanno inefficiente trasporto verticale di calore. La scala $\lambda_c \approx 2h$ rappresenta l'ottimo.

Per il mantello terrestre, con $h \approx 2800$ km, $\Delta T \approx 2500$ K, $\alpha \approx 3 \times 10^{-5}$ K^{-1}, $\eta \approx 10^{21}$ Pa·s, $\kappa \approx 10^{-6}$ m^2/s, otteniamo $Ra \approx 10^7$, enormemente supercritico. Questo implica che la convezione è estremamente vigorosa, e la teoria lineare fornisce solo il punto di partenza; la dinamica reale è fortemente non lineare.

Convezione Fortemente Supercritica: Strati Limite e Scaling

Quando $Ra >> Ra_c$, come nel mantello terrestre, la struttura della convezione è radicalmente diversa dalla convezione debolmente supercritica. Il flusso sviluppa strati limite termici sottili vicino alle superfici superiore e inferiore, separati da un interior ben mescolato e quasi isotermo.

Lo spessore dello strato limite termico δ_T può essere stimato dall'equilibrio locale tra advection verticale e diffusione termica. Nella regione di upwelling (risalita), il materiale caldo sale con velocità caratteristica w attraverso lo strato limite freddo superiore. Il tasso di raffreddamento per advection è approssimativamente $w(\Delta T/h)$, mentre il tasso di raffreddamento per diffusione è $\kappa(\Delta T/\delta_T^2)$. Eguagliando questi (equilibrio marginale), otteniamo $\delta_T \sim \sqrt{(\kappa h/w)}$.

La velocità w può essere stimata dall'equilibrio tra forze di galleggiamento e forze viscose. In uno strato limite di spessore δ, la forza di galleggiamento per unità di volume è $\rho_0 g \alpha \Delta T$, mentre lo sforzo viscoso per unità di volume è $\eta\, w/\delta^2$. Eguagliando, $w \sim (\rho_0 g \alpha \Delta T \delta^2)/\eta$. Sostituendo questa espressione per w nell'equazione per δ_T e risolvendo auto-consistentemente, si ottiene lo scaling: δ_T/h ~ Ra^(-1/3).

Questo implica che per $Ra = 10^7$, lo spessore dello strato limite termico è circa un centesimo dello spessore totale, quindi δ_T ≈ trenta chilometri per il mantello. Questa stima è notevolmente vicina allo spessore osservato della litosfera termica (circa cento chilometri per litosfera oceanica vecchia), suggerendo che la litosfera è effettivamente lo strato limite termico superiore della convezione mantellica.

Il numero di Nusselt $Nu = q/(\kappa \Delta T/h)$, che misura il rapporto tra il flusso di calore convettivo totale q e il flusso di calore puramente conduttivo, scala come Nu ~ Ra^β, dove l'esponente β dipende dalla geometria e dalle condizioni al contorno. Esperimenti di laboratorio, simulazioni numeriche e teorie asintotiche convergono su β ≈ un terzo per convezione in fluidi con numero di Prandtl $Pr = \eta/(\rho_0 \kappa)$ dell'ordine dell'unità o maggiore, che è rilevante per il mantello dove Pr è enorme (dell'ordine di dieci alla ventitré).

Per il mantello, il flusso di calore superficiale medio osservato è circa ottantasette milliwatt per metro quadrato, corrispondente a un flusso totale di circa quarantaquattro terawatt. Con ΔT ≈ duemilacinquecento kelvin e κ ≈ tre watt per metro kelvin, il flusso conduttivo sarebbe circa tre milliwatt per metro quadrato, quindi Nu ≈ trenta. Questo valore è consistente con lo scaling Nu ~ Ra^(1/3) dato che Ra ≈ dieci alla settima implica Nu ~ trecento, e la discrepanza può essere riconciliata considerando che il mantello ha viscosità fortemente dipendente dalla temperatura e dalla pressione, e che la convezione è tridimensionale e dipendente dal tempo.

Dipendenza della Viscosità dalla Temperatura: Convezione con Viscosità Variabile

Un'assunzione cruciale nelle sezioni precedenti è stata che la viscosità η sia costante. Tuttavia, esperimenti di laboratorio su minerali mantellici e inferenze da osservazioni geodetiche mostrano che la viscosità del mantello varia di molti ordini di grandezza con la temperatura. Una dipendenza tipica è la legge di Arrhenius: $\eta(T) = \eta_0 \exp[E_a/(R(T + T_{offset}))]$, dove E_a è l'energia di attivazione (tipicamente trecentocinquanta-cinquecento kilojoule per mole), R è la costante dei gas, e T_{offset} è aggiunto per evitare singolarità matematiche.

Una misura della variazione di viscosità attraverso lo strato è il rapporto di viscosità $\gamma = \eta_{top}/\eta_{bottom}$, dove η_{top} è la viscosità alla temperatura superficiale fredda e η_{bottom} è la viscosità alla temperatura di fondo calda. Per il mantello, γ può raggiungere valori di dieci alla quattro o maggiori. Questa variazione drastica ha conseguenze profonde sulla struttura della convezione.

Con viscosità dipendente dalla temperatura, gli strati limite freddi diventano regioni ad alta viscosità che resistono alla deformazione e tendono a comportarsi come piastre rigide – precisamente ciò che osserviamo come placche litosferiche. Gli strati limite caldi alla base

del mantello, invece, hanno viscosità molto bassa e si deformano facilmente. Questa asimmetria tra strati limite superiore e inferiore è fondamentale per comprendere perché la superficie terrestre è dominata da tettonica a placche piuttosto che da un regime di deformazione diffusa.

La convezione con viscosità fortemente dipendente dalla temperatura esibisce un regime chiamato "stagnant lid" (coperchio stagnante) per γ sufficientemente grande. In questo regime, lo strato limite freddo superiore diventa completamente immobile e la convezione avviene solo nel mantello sottostante, con un pattern di flusso che "scivola" sotto il coperchio stagnante. La transizione da convezione attiva (dove lo strato limite partecipa al flusso) a stagnant lid avviene per γ_c che dipende dal numero di Rayleigh, ma tipicamente γ_c ~ dieci alla tre - dieci alla quattro.

La Terra si trova vicino a questa transizione critica, il che potrebbe spiegare perché la tettonica delle placche (una forma di coperchio mobile ma frammentato) è emersa sulla Terra ma non su Venere, che ha dimensioni e composizione simili ma temperatura superficiale molto più alta (circa 730 kelvin vs 330 kelvin terrestri). La temperatura superficiale più alta su Venere implica viscosità superficiale più bassa e quindi γ più piccolo, favorendo il regime stagnant lid.

Instabilità Secondarie e Pattern Convettivi Complessi

La convezione a Ra molto elevato non è semplicemente una versione amplificata della convezione debolmente supercritica, ma esibisce fenomeni qualitativamente nuovi dovuti a instabilità secondarie che si sviluppano sugli strati limite.

L'instabilità di Rayleigh-Taylor si manifesta quando uno strato limite termico freddo e denso (ad alta viscosità) si trova sopra materiale più caldo e meno denso. Questa configurazione è gravitazionalmente instabile. Perturbazioni dello spessore dello strato limite crescono esponenzialmente, con lunghezze d'onda preferite determinate da un bilancio tra forze di galleggiamento e resistenza viscosa. Il risultato è la frammentazione dello strato limite in "drips" freddi che affondano nel mantello sottostante – un processo che può rappresentare l'iniziazione della subduzione nelle zone dove placche litosferiche vecchie e pesanti cominciano ad affondare.

Nei downwellings (regioni di discesa), il materiale freddo forma plume discendenti cilindrici o a forma di lamina. La geometria dipende dal rapporto di viscosità e dalla storia della convezione. Per γ grande, i downwellings tendono ad assumere forma di lamine (sheet-like) piuttosto che assialsimmetrici, consistentemente con l'osservazione che le zone di subduzione terrestri sono strutture allungate piuttosto che puntuali.

Negli upwellings (regioni di risalita), il materiale caldo può formare plume assialmente simmetrici se la risalita è sufficientemente localizzata, o upwelling diffuso se distribuito su ampie aree. I plume cilindrici sono caratterizzati da una "testa" (head) sferoidale di materiale caldo che precede una "coda" (tail) cilindrica più stretta. Questa geometria emerge naturalmente quando un plume si stacca da uno strato limite basale e risale attraverso un mantello con viscosità stratificata.

Teoria dei Plume Mantellici: Modelli Matematici

I plume mantellici sono ipotizzati essere la manifestazione superficiale di upwelling localizzati che risalgono dalle profondità del mantello, possibilmente dallo strato D'' alla base del mantello o dalla zona di transizione a 660 chilometri. La loro firma superficiale include hotspots vulcanici persistenti come Hawaii, Islanda, Yellowstone, che mostrano vulcanismo attivo per decine di milioni di anni nonostante il movimento delle placche litosferiche soprastanti.

Il modello classico di un plume termico considera un cilindro di materiale caldo con raggio r_p e anomalia di temperatura ΔT_p che risale attraverso il mantello con velocità w_p. L'equilibrio tra forza di galleggiamento ($\pi r_p^2 \Delta T_p \rho_0 g \alpha$ per unità di lunghezza) e resistenza viscosa (approssimativamente $\eta\ w_p$ per unità di lunghezza, con correzione geometrica) fornisce una stima della velocità di risalita: $w_p \sim (\rho_0 g \alpha \Delta T_p r_p^2)/(\eta)$.

Con valori tipici $r_p \sim$ cento chilometri, $\Delta T_p \sim$ duecento kelvin, $\eta \sim$ dieci alla ventuno pascal secondo, otteniamo $w_p \sim$ zero virgola un metri all'anno ~ dieci centimetri all'anno, che è consistente con le stime da modellazione geochimica delle velocità di risalita dei plume.

Il flusso di calore trasportato dal plume è $Q_p \sim \rho_0 c_p w_p \pi r_p^2 \Delta T_p$. Con i valori sopra e $c_p \sim$ mille joule per chilogrammo kelvin, otteniamo $Q_p \sim$ tre per dieci alla undici watt ~ trecento gigawatt, che è una frazione significativa del flusso di calore totale per un singolo plume maggiore.

La dinamica tridimensionale dei plume è più complessa e richiede simulazioni numeriche. Quando un plume risale attraverso transizioni di viscosità (ad esempio attraversando la transizione di fase a 660 chilometri dove si ha un aumento di viscosità), può subire spreading orizzontale parziale prima di penetrare nel mantello superiore. Questo può creare le "teste" gigantesche osservate in alcune province vulcaniche di grandi dimensioni (Large Igneous Provinces, LIP) come il Deccan Traps in India o la Columbia River Basalt negli Stati Uniti.

Convezione a Tutto Mantello vs. Convezione Stratificata

Una questione fondamentale nella geodinamica è se la convezione nel mantello sia un sistema unico che coinvolge l'intero spessore (convezione a tutto mantello) o se esistano strati convettivi separati sopra e sotto la discontinuità a seicentosessanta chilometri (convezione stratificata). Questa transizione di profondità corrisponde alla trasformazione di fase da spinello a post-spinello (perovskite più magnesiowüstite), accompagnata da un aumento di densità di circa il cinque per cento.

Le transizioni di fase influenzano profondamente la convezione perché alterano la galleggiabilità del materiale. Una transizione di fase esotermica (dove la fase densa è stabile ad alta pressione) come quella a seicentosessanta chilometri tende a ostacolare la convezione: materiale freddo che scende è compresso e attraversa la transizione a profondità minore rispetto al mantello circostante, assumendo la fase densa e diventando più pesante; viceversa materiale caldo che sale è decompresso e rimane nella fase meno densa più a lungo, diventando più leggero. Entrambi gli effetti si oppongono alla convezione.

L'effetto netto è quantificato dal parametro di Clapeyron γ_cl = dP/dT della transizione, dove P è la pressione e T la temperatura. Per la transizione a seicentosessanta chilometri, γ_cl ≈ -tre megapascal per kelvin (negativo perché esotermica). Il parametro adimensionale che controlla la stratificazione è S = (ρ₀αg γ_cl ΔT_tr)/(ΔP_tr), dove ΔT_tr è la variazione di temperatura attraverso la transizione e ΔP_tr è la variazione di pressione. Per S > S_c ~ zero virgola tre, la convezione diventa stratificata; per S < S_c la convezione penetra la transizione.

Le evidenze sismologiche attuali favoriscono fortemente la convezione a tutto mantello: tomografie sismiche mostrano anomalie ad alta velocità (interpretate come lastre subdotte fredde) che penetrano oltre 660 chilometri e si estendono fino al mantello inferiore profondo. Tuttavia, alcune lastre sembrano rallentare o deformarsi a questa profondità, suggerendo che la transizione esercita comunque un'influenza sulla convezione anche se non la stratifica completamente.

Simulazioni Numeriche della Convezione Mantellica

La complessità delle equazioni che governano la convezione mantellica – non linearità, forte dipendenza della viscosità dalla temperatura e pressione, transizioni di fase, reologia complessa, geometria sferica tridimensionale – rende impossibile ottenere soluzioni analitiche eccetto in casi altamente idealizzati. Le simulazioni numeriche sono quindi essenziali per esplorare la dinamica realistica.

I codici numerici per convezione mantellica risolvono tipicamente le equazioni in formulazione velocità-pressione o funzione di corrente-vorticità, discretizzando spazialmente mediante elementi finiti, volumi finiti o metodi spettrali, e avanzando temporalmente mediante schemi espliciti o impliciti.

Le sfide computazionali sono formidabili. La geometria sferica richiede griglie che evitino singolarità ai poli. La presenza di strati limite sottili richiede raffinamento adattivo della griglia per risolvere adeguatamente i gradienti ripidi senza sprecare risorse computazionali nell'interior. La dipendenza non lineare della viscosità porta a un sistema fortemente non lineare che richiede iterazioni Newton-Raphson o Picard con precondizionamento sofisticato per essere risolto efficientemente.

I modelli tridimensionali globali moderni raggiungono risoluzioni effettive di pochi chilometri nelle regioni critiche e integrano per centinaia di milioni di anni simulati, richiedendo settimane o mesi di tempo di calcolo su supercomputer massivi. Questi modelli riproducono caratteristiche osservate come placche con geometrie realistiche, zone di subduzione asimmetriche, plume localizzati, e strutture su larga scala nel mantello profondo comparabili a quelle viste in tomografia sismica.

Assimilazione di Dati Geofisici: Geodinamica Inversa

Un approccio emergente è l'assimilazione di osservazioni geofisiche multiple per vincolare direttamente i modelli di convezione. Questo capovolgimento del problema tradizionale – invece di assumere parametri e calcolare osservabili, si usano osservabili per inferire parametri – è chiamato geodinamica inversa.

Le osservazioni che possono essere assimilate includono: (i) tomografia sismica delle anomalie di velocità tridimensionali, (ii) campo di gravità dal satellite GRACE e sue variazioni temporali, (iii) topografia dinamica ricavata dalla differenza tra topografia osservata e quella prevista da modelli di isostasia, (iv) flusso di calore superficiale da misure geotermiche, (v) velocità delle placche da geodesia spaziale (GPS), (vi) storia della subduzione ricostruita da paleomagnetismo e ricostruzioni cinematiche.

Il problema inverso è posto come ottimizzazione: trovare il campo di viscosità η(r, θ, φ, T), la distribuzione di temperatura T(r, θ, φ, t), e altri parametri che minimizzano una funzione obiettivo della forma: Φ = Σ_i w_i ||d_i^obs - d_i^calc(parametri)||² + Φ_regolarizzazione, dove d_i^obs sono i dati osservati, d_i^calc sono le predizioni del modello, w_i sono pesi, e Φ_regolarizzazione penalizza modelli non fisici.

Il metodo aggiunto (adjoint method) permette di calcolare efficientemente il gradiente della funzione obiettivo rispetto ai parametri anche quando questi sono distribuiti spazialmente (milioni di gradi di libertà). L'idea è risolvere le equazioni forward per calcolare i campi predetti, poi risolvere equazioni backward (aggiunto) per propagare i residui dai dati ai parametri, ottenendo il gradiente necessario per algoritmi di ottimizzazione come gradiente coniugato o L-BFGS.

Questa tecnica sta rivoluzionando la geodinamica, permettendo di costruire modelli della Terra che sono simultaneamente consistenti con vincoli dinamici (equazioni del moto) e osservazioni multiple, riducendo l'arbitrarietà nei modelli parametrizzati manualmente.

Convezione e Tettonica delle Placche: Il Problema dell'Autorganizzazione

Un problema profondo e ancora non completamente risolto è come la convezione mantellica genera spontaneamente la tettonica delle placche – cioè la frammentazione della superficie in piastre rigide con margini localizzati dove avviene tutta la deformazione. Esperimenti di laboratorio e simulazioni numeriche semplici di convezione termica producono tipicamente un regime di "deformazione diffusa" o "stagnant lid", non placche mobili discrete.

Gli ingredienti necessari per ottenere tettonica a placche nelle simulazioni includono: (i) reologia visco-plastica con soglia di snervamento (yield stress), che permette localizzazione della deformazione in zone di taglio quando gli sforzi superano la soglia; (ii) dipendenza della viscosità dalla temperatura con contrasti di molti ordini di grandezza; (iii) indebolimento da danno o da acqua nelle zone di faglia; (iv) possibilmente feedback tra fusione parziale e reologia.

Con questi ingredienti, simulazioni recenti hanno dimostrato l'emergenza spontanea di comportamento simil-placche, con superfici che si frammentano in unità mobili separate da margini stretti dove si concentra la deformazione. La dimensione e la geometria delle placche emergenti dipendono sensibilmente dai parametri reologici, in particolare dalla profondità dello yield stress e dal tasso di indebolimento con la deformazione.

Questo suggerisce che la tettonica delle placche non è una proprietà intrinseca della convezione, ma un regime che emerge solo per specifiche combinazioni di parametri materiali e condizioni al contorno. Questo potrebbe spiegare perché Venere e Marte, pianeti

di dimensioni comparabili, non mostrano tettonica a placche attiva: i loro parametri reologici (influenzati da temperatura superficiale, contenuto di acqua, etc.) potrebbero collocarli in un regime diverso di convezione superficiale.

Interazione tra Mantello e Nucleo: Lo Strato D''

La regione più profonda del mantello, negli ultimi duecento-trecento chilometri sopra il confine con il nucleo, è chiamata strato D'' (D doppio primo) e presenta proprietà sismiche e dinamiche peculiari. Tomografie sismiche rivelano eterogeneità laterali estreme, con anomalie di velocità che raggiungono il dieci per cento o più – molto maggiori di quelle nel resto del mantello.

Una possibile spiegazione è che D'' sia lo strato limite termico inferiore della convezione mantellica, dove materiale freddo dalle lastre subdotte si accumula prima di diffondersi lateralmente. Il grande contrasto di temperatura tra mantello caldo e nucleo esterno ancora più caldo (temperatura al confine mantello-nucleo di circa quattromila kelvin) produce gradienti termici ripidi e possibilmente fusione parziale.

Un'altra ipotesi è che D'' contenga materiale chimicamente distinto, residuo della differenziazione primordiale terrestre o accumulato da erosione di materiale oceanico subdotto nel corso di miliardi di anni. Le grandi province a bassissima velocità di taglio (LLSVPs, Large Low Shear Velocity Provinces) sotto Africa e Pacifico, che si estendono per migliaia di chilometri orizzontalmente e centinaia verticalmente, potrebbero essere accumuli di questo materiale denso e chimicamente distinto che resiste all'incorporazione nella convezione.

La dinamica di D'' è accoppiata con quella del nucleo esterno attraverso lo scambio di calore al confine. Il flusso di calore dal nucleo al mantello (stimato circa dieci-quindici terawatt) guida parzialmente la convezione mantellica e potrebbe anche influenzare la geodinamo che genera il campo magnetico terrestre. Variazioni nella topografia termica e nella conducibilità alla base del mantello potrebbero modulare il flusso di calore localmente, con possibili conseguenze sulla struttura del campo magnetico e sulla frequenza di inversioni geomagnetiche.

Geomagnetismo - Dinamo, Inversioni e Paleomagnetismo

Introduzione al Campo Magnetico Terrestre

Il campo magnetico terrestre è una delle caratteristiche più notevoli del nostro pianeta, estendendosi da migliaia di chilometri nel nucleo fino a decine di migliaia di chilometri nello spazio, dove interagisce con il vento solare formando la magnetosfera. Sulla superficie terrestre, l'intensità del campo è circa cinquanta microtesla (mezzo gauss), sufficientemente forte da deflettere aghi magnetici e permettere la navigazione mediante bussola, ma abbastanza debole da essere misurato con precisione mediante magnetometri sensibili.

La scoperta che il campo magnetico terrestre è generato internamente e non è un magnete permanente risale al diciassettesimo secolo, quando William Gilbert nel milleseicento pubblicò "De Magnete", proponendo che la Terra stessa fosse un grande magnete. Tuttavia, sappiamo oggi che il campo non può essere dovuto a magnetizzazione permanente del ferro nel nucleo, perché le temperature nel nucleo (4000-6500 kelvin) sono enormemente superiori alla temperatura di Curie del ferro (circa 1841 kelvin), sopra la quale i materiali ferromagnetici perdono la loro magnetizzazione permanente.

La teoria moderna attribuisce il campo magnetico a un meccanismo di dinamo auto-eccitata operante nel nucleo esterno liquido. In questo processo, il movimento del ferro liquido conduttore (dovuto a convezione termica e compositionale) genera correnti elettriche, che a loro volta producono campi magnetici secondo la legge di Ampère, e questi campi magnetici interagiscono con il flusso per sostenere le correnti – chiudendo un ciclo di feedback positivo. Questo meccanismo richiede un'interazione non banale tra fluidodinamica e elettromagnetismo, descritta dalle equazioni della magnetoidrodinamica (MHD).

Le Equazioni della Magnetoidrodinamica

Il framework matematico per descrivere la dinamo terrestre è fornito dalle equazioni della magnetoidrodinamica, che accoppiano le equazioni di Navier-Stokes per il fluido con le equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico.

Le equazioni di Maxwell rilevanti (in approssimazione quasi-statica dove si trascura la corrente di spostamento) sono: $\nabla \cdot B = 0$ (assenza di monopoli magnetici), $\nabla \times E = -\partial B/\partial t$ (legge di Faraday), $\nabla \times B = \mu_0 J$ (legge di Ampère senza corrente di spostamento), dove B è il campo magnetico, E è il campo elettrico, J è la densità di corrente, e μ_0 = quattro π per dieci alla meno sette henry per metro è la permeabilità del vuoto.

La legge di Ohm in un mezzo in movimento è $J = \sigma(E + v \times B)$, dove σ è la conducibilità elettrica e v è la velocità del fluido. Questa forma generalizzata tiene conto della forza elettromotrice indotta dal movimento del conduttore attraverso il campo magnetico. Eliminando E e J dalle equazioni di Maxwell usando la legge di Ohm, otteniamo l'equazione di induzione magnetica: $\partial B/\partial t = \nabla \times (v \times B) + \eta \nabla^2 B$, dove η = uno su $\mu_0 \sigma$ è la diffusività magnetica.

Questa equazione governa l'evoluzione del campo magnetico. Il primo termine a destra (termine di advection o termine di induzione) descrive come il campo magnetico viene trasportato e deformato dal flusso. Il secondo termine (termine di diffusione) descrive il decadimento del campo magnetico per dissipazione ohmica. Il bilancio tra questi termini è misurato dal numero di Reynolds magnetico R_m = UL su η, dove U è una velocità caratteristica e L una lunghezza caratteristica.

Per il nucleo terrestre, con U circa dieci alla meno quattro metri al secondo (velocità tipica dei flussi convettivi), L circa dieci alla sei metri (raggio del nucleo), e η circa due metri quadrati al secondo (per ferro liquido a temperatura e pressione del nucleo), otteniamo R_m circa cinquanta. Questo valore maggiore di uno indica che l'advection domina sulla diffusione, condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché possa operare un meccanismo di dinamo.

Le equazioni del moto per il fluido nel nucleo esterno, in approssimazione di Boussinesq e nel sistema di riferimento rotante con la Terra, sono: ∂v su ∂t più $(v\cdot\nabla)v$ più due $\Omega\times v$ = meno uno su ρ ∇p più uno su $\rho\mu_0$ $(\nabla\times B)\times B$ più $v\nabla^2 v$ più g', dove Ω è la velocità angolare di rotazione terrestre (circa sette virgola ventinove per dieci alla meno cinque radianti al secondo), ρ è la densità, p è la pressione, v è la viscosità cinematica, e g' include sia la gravità che il termine di galleggiamento compositional e termico.

Il termine $(\nabla\times B)\times B$ su $\rho\mu_0$ = $J\times B$ su ρ è la forza di Lorentz per unità di massa, che rappresenta l'azione del campo magnetico sul fluido conduttore. La conservazione della massa richiede $\nabla\cdot v = 0$ (incomprimibilità).

Il Teorema Antidinam di Cowling

Prima di sviluppare teorie positive sulla dinamo, è utile comprendere alcuni teoremi negativi che escludono certi tipi di dinamo. Il più famoso è il teorema di Cowling (1934), che afferma che una dinamo non può mantenere un campo magnetico assialmente simmetrico (indipendente dall'angolo azimutale φ in coordinate sferiche).

La dimostrazione matematica rigorosa è tecnica, ma l'idea fisica può essere compresa considerando le linee di campo di un campo assialmente simmetrico. Queste giacciono in piani meridionali (contenenti l'asse di simmetria). Affinché la dinamo funzioni, le linee di campo devono formare anelli chiusi attraverso i quali può fluire corrente, e questa corrente deve rigenerare il campo magnetico originale. Tuttavia, Cowling dimostrò che in geometria assialmente simmetrica questo non è possibile: si arriva sempre a una contraddizione dove alcune regioni richiederebbero correnti infinite.

Questo teorema ha implicazioni profonde: implica che la dinamo terrestre deve essere intrinsecamente tridimensionale, con componenti del campo e del flusso che variano con l'angolo azimutale. La dinamo non può essere un fenomeno puramente bidimensionale in geometria meridionale.

Teoremi antidinam simili escludono altre configurazioni semplificate. Ad esempio, Backus dimostrò che non può esistere dinamo con flusso stazionario e indipendente da z (in geometria cartesiana). Questi risultati "no-go" guidano la costruzione di modelli di dinamo realistici, indicando quali simmetrie devono essere rotte.

Il Meccanismo α-ω di Generazione del Campo

Nonostante i teoremi antidinam, è possibile costruire dinamo funzionanti con configurazioni tridimensionali appropriate. Il modello α-ω, sviluppato da Parker, Steenbeck, Krause-Rädler e altri negli anni sessanta, fornisce il paradigma concettuale dominante per comprendere la dinamo terrestre.

L'idea centrale è decomporre il campo magnetico in due parti: una componente poloidale B_p (che giace in piani meridionali e può essere derivata da un potenziale vettoriale azimutale) e una componente toroidale B_t (che circonda l'asse di rotazione). Similarmente, il campo di velocità è decomposto in parti poloidale v_p e toroidale v_t.

L'effetto ω consiste nella generazione di campo toroidale da campo poloidale mediante shear differenziale. Se il fluido ruota con velocità angolare che varia con raggio e latitudine, Ω = Ω(r, θ), allora le linee di campo poloidale vengono stirate nella direzione azimutale, generando componenti toroidali. Matematicamente, il contributo all'equazione di induzione è: ∂B_t su ∂t contiene termine proporzionale a (r sin θ)∇Ω·(f̂×B_p), dove f̂ è il versore radiale.

Questo processo da solo non costituisce una dinamo, perché converte campo poloidale in toroidale ma non chiude il ciclo. Serve un meccanismo che rigeneri campo poloidale da toroidale. Questo è fornito dall'effetto α, dovuto all'azione collettiva di moti turbolenti su piccola scala con elicità (correlazione tra velocità e vorticità).

L'effetto α può essere compreso qualitativamente come segue. Consideriamo un elemento di flusso turbolento a forma di vortice elicoidale (come una spirale). Se questo vortice è immerso in un campo magnetico toroidale, la rotazione del vortice torce le linee di campo, creando componenti con diversa orientazione. Se molti vortici con orientazione preferita (dovuta per esempio alla forza di Coriolis che favorisce vortici ciclonici) agiscono collettivamente, il loro effetto netto è rigenerare campo poloidale da toroidale.

Matematicamente, l'effetto α è parametrizzato come una forza elettromotrice media che contribuisce all'equazione di induzione: ⟨v×B⟩ = αB più ... dove le parentesi angolari denotano media su piccola scala, α è un coefficiente (pseudo-scalare) che dipende dalla geometria del flusso turbolento, tipicamente proporzionale a ⟨v'·(∇×v')⟩ dove v' è la componente fluttuante della velocità.

Le equazioni accoppiate per le componenti poloidale e toroidale, in forma schematica, sono: ∂B_p su ∂t circa uguale α B_t più η∇²B_p, ∂B_t su ∂t circa uguale (effetto ω da shear differenziale) più η∇²B_t. Questo sistema, analizzato mediante teoria di stabilità lineare, predice che per valori sufficientemente grandi dei parametri α e shear, esiste una soluzione instabile con crescita esponenziale del campo magnetico – questo è il meccanismo di dinamo α-ω.

La Dinamo Terrestre: Modelli Numerici Tridimensionali

I modelli α-ω forniscono intuizione qualitativa ma richiedono parametrizzazioni dei processi turbolenti su piccola scala. L'approccio moderno è risolvere numericamente le equazioni MHD complete in geometria sferica tridimensionale, senza parametrizzazioni ad hoc, consentendo alla turbolenza di svilupparsi naturalmente nella simulazione.

Le equazioni sono discretizzate in spazio (tipicamente usando armoniche sferiche nella direzione angolare e differenze finite o elementi finiti nella direzione radiale) e tempo (schemi semi-impliciti o completamente impliciti per gestire la rigidità del sistema). Le simulazioni moderne raggiungono risoluzioni spettrali fino a gradi l circa uguale trecento-seicento in armoniche sferiche e centocinquanta-duecento livelli radiali, richiedendo calcoli massivi su supercomputer.

Queste simulazioni hanno dimostrato che la dinamo auto-sostenuta può emergere spontaneamente da convezione termocompositional nel nucleo, senza bisogno di ipotesi sulla forma del campo o del flusso. Le simulazioni riproducono molte caratteristiche osservate del campo geomagnetico: (i) struttura dominata dal dipolo assiale con momento

magnetico dell'ordine di otto per dieci alla ventidue ampere metri quadrati, (ii) variazione secolare su scale temporali di decenni-secoli, (iii) struttura non dipolare significativa specialmente nell'emisfero sud (anomalia del Sud Atlantico), (iv) inversioni spontanee della polarità del campo.

Un risultato sorprendente è che il campo magnetico nel nucleo ha struttura molto più complessa del campo osservato in superficie. Mentre il campo superficiale è dominato dal dipolo assiale (coefficiente g_1^0 in sviluppo in armoniche sferiche), con contributi non dipolari progressivamente decrescenti, il campo nel nucleo contiene componenti multipolare forti fino a gradi alti. La dominanza dipolare osservata in superficie è in parte un effetto di filtro geometrico: i multipoli alti decadono più rapidamente con la distanza dalla sorgente, quindi solo i gradi bassi sopravvivono fino alla superficie.

Le Inversioni del Campo Magnetico

Una delle caratteristiche più intriganti del campo geomagnetico è che la sua polarità si è invertita centinaia di volte nella storia geologica. Durante un'inversione, il dipolo assiale diminuisce di intensità fino a valori molto bassi (forse dieci-venti per cento del valore normale), la direzione del campo diventa altamente irregolare e variabile, e poi il campo cresce nuovamente con polarità opposta. L'intero processo richiede tipicamente alcune migliaia di anni.

La registrazione paleomagneti ca nelle rocce vulcaniche, che acquisiscono magnetizzazione rimanente nella direzione del campo ambiente al momento del raffreddamento, ha permesso di ricostruire la storia delle inversioni. La scala temporale geomagnetica (Geomagnetic Polarity Time Scale, GPTS) documenta inversioni fino a centosettanta milioni di anni fa con alta risoluzione, e fino a oltre un miliardo di anni fa con risoluzione più bassa.

La frequenza delle inversioni varia nel tempo geologico in modo non casuale. Durante il Cretaceo medio (circa ottanta-centoventi milioni di anni fa), il campo rimase in polarità normale (stesso orientamento di oggi) per circa quaranta milioni di anni senza inversioni – un periodo chiamato Cretaceous Normal Superchron. Al contrario, in altri periodi le inversioni erano molto frequenti, con tempi medi tra inversioni di poche centinaia di migliaia di anni. La frequenza media negli ultimi venti milioni di anni è circa quattro-cinque inversioni per milione di anni.

L'ultima inversione, chiamata inversione di Brunhes-Matuyama, avvenne circa settecentoottantamila anni fa. Da allora siamo nell'epoca di polarità normale chiamata Brunhes. Alcuni studiosi hanno speculato che il campo potrebbe essere in procinto di invertirsi, basandosi sull'osservazione che l'intensità del dipolo è diminuita di circa il dieci per cento negli ultimi centosettanta anni. Tuttavia, variazioni di questa magnitudine sono comuni nella variazione secolare e non costituiscono evidenza forte di un'inversione imminente.

Le simulazioni di dinamo numeriche producono spontaneamente inversioni. L'analisi di queste simulazioni suggerisce che le inversioni sono fenomeni caotici, innescati da fluttuazioni casuali nella convezione del nucleo che perturbano l'equilibrio delicato tra generazione e dissipazione del campo dipolare. Durante l'inversione, le componenti non dipolari del campo diventano temporaneamente dominanti, mentre il dipolo decade e poi si ricostruisce con orientazione opposta.

Il Paleomagnetismo: Principi Fisici e Applicazioni

Il paleomagnetismo studia il campo magnetico terrestre del passato geologico mediante l'analisi della magnetizzazione rimanente naturale (NRM, Natural Remanent Magnetization) preservata nelle rocce. Questa disciplina ha fornito alcune delle evidenze cruciali per la tettonica delle placche e continua a essere strumento fondamentale in geologia e geodinamica.

Il principio base è che certi minerali magnetici (principalmente magnetite Fe_3O_4 e ematite Fe_2O_3) acquisiscono magnetizzazione quando si raffreddano sotto la temperatura di Curie o quando sedimenti contenenti granuli magnetici si consolidano. La direzione di magnetizzazione è parallela al campo magnetico ambiente al momento della formazione, e l'intensità è proporzionale (almeno in prima approssimazione) all'intensità del campo.

La magnetizzazione termoremanenteale (TRM, Thermoremanent Magnetization) si forma quando rocce ignee si raffreddano attraverso la temperatura di Curie dei loro minerali magnetici. Sopra la temperatura di Curie, i momenti magnetici atomici sono randomizzati dal moto termico. Al raffreddamento, i momenti si allineano con il campo magnetico esterno, e questo allineamento viene "congelato" quando la roccia solidifica completamente. La teoria di Néel della magnetizzazione termoremanenteale descrive matematicamente questo processo considerando l'equilibrio tra energia di interazione magnetica (favorisce allineamento) ed energia termica (favorisce disordine).

La magnetizzazione deposizionale remanente (DRM, Depositional Remanent Magnetization) si acquisisce in sedimenti quando particelle magnetiche si depositano in acqua e si orientano con il campo magnetico prima della litificazione. L'intensità della DRM è tipicamente più debole della TRM e può essere parzialmente randomizzata da bioturbazione o compattazione.

La stabilità temporale della magnetizzazione rimanente è cruciale per applicazioni paleomagnetiche. I domini magnetici nei granuli devono essere sufficientemente stabili da resistere al decadimento termico (superparamagnetismo) e alla rimagnetizzazione viscosa su scale temporali geologiche. La teoria di Néel prevede che il tempo di rilassamento per un dominio magnetico singolo sia $\tau = \tau_0 \exp(KV \text{ su } kT)$, dove τ_0 circa dieci alla meno nove secondi, K è la costante di anisotropia, V è il volume del grano, k è la costante di Boltzmann, e T è la temperatura. Per V sufficientemente grande, τ diventa geologicamente lungo (milioni-miliardi di anni).

La Deriva Polare Apparente e la Tettonica delle Placche

Una delle applicazioni più importanti del paleomagnetismo è stata la dimostrazione del movimento delle placche litosferiche. L'idea chiave è confrontare la direzione di magnetizzazione paleomagneti ca in rocce di varie età con la direzione del campo attuale.

Per un dipolo geocentrico assiale (GAD, Geocentric Axial Dipole), che è la media temporale del campo geomagnetico su migliaia-milioni di anni, la direzione del campo a una latitudine magnetica λ_m è data da: $\tan(I) = due \tan(\lambda_m)$, dove I è l'inclinazione (angolo rispetto all'orizzontale). L'inclinazione varia da I = novanta gradi al polo magnetico a I = zero gradi all'equatore magnetico. La declinazione (azimut) punta verso il polo nord magnetico.

Misurando l'inclinazione e la declinazione della magnetizzazione remanente in una roccia, si può calcolare la posizione del polo magnetico virtuale (VGP, Virtual Geomagnetic Pole) al tempo di formazione della roccia. Se la placca tettonica su cui si trova la roccia si è mossa nel tempo, il VGP apparirà in posizione diversa dal polo geografico attuale.

Costruendo curve di deriva polare apparente (APWP, Apparent Polar Wander Path) per diverse placche usando rocce di varie età, gli scienziati negli anni cinquanta e sessanta dimostrarono che placche diverse hanno APWP diverse e non coincidenti – evidenza inconfutabile che le placche si sono mosse relativamente le une alle altre. La coincidenza delle APWP quando le placche vengono ricostruite in posizioni precedenti (ad esempio unendo Sud America e Africa in Gondwana) fornì una delle prove più convincenti della deriva dei continenti.

Oggi, il paleomagnetismo è utilizzato per ricostruire quantitativamente la posizione paleogeografica dei continenti, vincolare tassi di apertura oceanica, determinare rotazioni di blocchi crostali in zone di faglia, e datare sequenze di rocce vulcaniche mediante correlazione con la GPTS.

La Variazione Secolare e le Jerk Geomagnetici

Su scale temporali di anni-decenni, il campo geomagnetico esibisce variazione secolare: cambiamenti graduali nell'intensità e direzione del campo. Osservatori magnetici hanno registrato queste variazioni sistematicamente da oltre quattro secoli, fornendo un database prezioso per studiare la dinamica del nucleo.

La variazione secolare ha componenti sia regolare (trend) che irregolare (fluttuazioni). Le componenti regolari includono la westward drift (deriva verso ovest) di alcune caratteristiche del campo non dipolare a velocità di circa 0,2 gradi per anno, corrispondente a un periodo di circa 1800 anni per una rotazione completa. Questo fenomeno è interpretato come manifestazione superficiale di onde torsionali che si propagano nel nucleo esterno.

Le componenti irregolari includono i geomagnetic jerks: cambiamenti improvvisi nel tasso di variazione secolare. Questi eventi sono caratterizzati da brusche variazioni nella derivata temporale seconda dei coefficienti di Gauss, e sembrano avvenire quasi-simultaneamente su scala globale. Jerk sono stati identificati negli anni 1969, 1980, 1991, 1999, e 2003, suggerendo una quasi-periodicità di circa dieci anni, sebbene l'intervallo vari.

La causa fisica dei jerk è dibattuta. Ipotesi includono: (i) cambiamenti repentini nelle forze che guidano la convezione nel nucleo, (ii) ridistribuzione rapida del momento angolare all'interno del nucleo, (iii) accoppiamento magnetoidrodinamico tra nucleo e mantello che causa oscillazioni. Simulazioni numeriche di dinamo riproducono fenomeni simili ai jerk, suggerendo che siano manifestazioni naturali della dinamica caotica della dinamo.

Accoppiamento Nucleo-Mantello e Variazioni della Rotazione Terrestre

Il nucleo esterno liquido e il mantello solido non sono completamente disaccoppiati, ma interagiscono attraverso tre meccanismi principali: accoppiamento topografico (forze di pressione su irregolarità topografiche al confine nucleo-mantello), accoppiamento gravitazionale (attrazione gravitazionale tra eterogeneità di densità nel nucleo e mantello), e

accoppiamento elettromagnetico (forze di Lorentz su correnti indotte dal movimento relativo tra nucleo e mantello in presenza del campo magnetico).

Questi accoppiamenti trasferiscono momento angolare tra nucleo e mantello, causando variazioni nella velocità di rotazione terrestre. Le variazioni osservate nella lunghezza del giorno (LOD, Length of Day) su scale decadali sono correlate con variazioni nella variazione secolare geomagnetica, supportando l'ipotesi di accoppiamento nucleo-mantello.

Il bilancio del momento angolare richiede che una diminuzione di LOD (accelerazione della rotazione del mantello) sia accompagnata da accelerazione opposta del nucleo esterno. Misurando accuratamente le variazioni di LOD mediante tecniche geodetiche spaziali (VLBI, GPS) e correggendo per altri effetti (accoppiamento atmosfera-terra solida, ridistribuzione di massa negli oceani e calotte glaciali), si possono inferire i cambiamenti nel momento angolare del nucleo.

Il momento d'inerzia del nucleo esterno è circa dieci alla trentasette chilogrammi metri quadrati, e variazioni tipiche di LOD su scala decadale sono circa un millisecondo. Questo implica cambiamenti di momento angolare dell'ordine di dieci alla ventinove chilogrammi metri quadrati al secondo, che devono essere bilanciati da couple (momenti torcenti) nucleo-mantello dell'ordine di dieci alla diciassette newton metri.

Stimando la forza dei vari meccanismi di accoppiamento, si trova che l'accoppiamento elettromagnetico è probabilmente dominante per variazioni decadali, con contributi significativi anche da accoppiamento topografico. Questo implica che il campo magnetico al confine nucleo-mantello ha intensità dell'ordine di un millitesla (confrontato con cinquanta microtesla in superficie), e che esistono eterogeneità topografiche con ampiezza di alcuni chilometri.

Il Problema del Paradosso del Calore e la Dinamo Composizionale

Un problema fondamentale nella teoria della dinamo terrestre è la sorgente di energia che guida la convezione nel nucleo. Calcoli semplici mostrano che la convezione puramente termica (guidata dal raffreddamento del nucleo) richiederebbe un flusso di calore al confine nucleo-mantello molto maggiore di quello che sembra plausibile dalle osservazioni e modelli di convezione mantellica.

La soluzione proposta è che la dinamo sia guidata principalmente da convezione composizionale piuttosto che (o in aggiunta a) convezione termica. Il nucleo esterno è una lega di ferro con circa dieci per cento in peso di elementi leggeri (probabilmente zolfo, ossigeno, silicio, e/o carbonio). Quando il nucleo si raffredda, ferro puro cristallizza al confine nucleo interno-nucleo esterno, rilasciando elementi leggeri che sono incompatibili con la struttura cristallina del ferro solido.

Questo processo, chiamato frazionamento composizionale, rilascia galleggiamento compositional: il fluido arricchito in elementi leggeri è meno denso del fluido circostante e sale verso l'esterno del nucleo, guidando convezione. Il galleggiamento compositional può essere molto efficiente nel guidare dinamo perché gli elementi leggeri non possono diffondere attraverso il nucleo (il coefficiente di diffusione molecolare è trascurabile), a differenza del calore che diffonde.

La potenza disponibile da frazionamento compositional dipende dal tasso di crescita del nucleo interno e dalla differenza di composizione tra nucleo interno e nucleo esterno. Stime suggeriscono che questo meccanismo può fornire diversi terawatt di potenza per guidare la dinamo – sufficiente per sostenere il campo magnetico osservato contro la dissipazione ohmica.

Oceanografia Fisica - Correnti, Maree e Onde Interne

Introduzione alla Dinamica degli Oceani

Gli oceani coprono circa il settantuno per cento della superficie terrestre e contengono il novantasette per cento dell'acqua del pianeta, formando un sistema dinamico di importanza cruciale per il clima globale, il ciclo idrologico e la vita marina. Il movimento delle acque oceaniche avviene su una vasta gamma di scale spaziali e temporali: dalle onde capillari millimetriche che si formano e dissipano in secondi, alle correnti oceaniche che trasportano enormi quantità di calore su migliaia di chilometri per decenni, fino alla circolazione termoalina globale che rimescola le acque profonde su scale di secoli e millenni.

La fisica matematica degli oceani è dominata dall'interazione tra tre fattori fondamentali: la rotazione terrestre, che introduce la forza di Coriolis deflettendo le correnti orizzontalmente; la stratificazione di densità, dovuta a variazioni di temperatura e salinità con la profondità, che inibisce i moti verticali e favorisce la propagazione di onde interne; e la forzante meccanica degli stress del vento sulla superficie oceanica, che inietta energia e momento nel sistema.

L'oceano non è un fluido omogeneo ma un sistema stratificato con proprietà che variano drammaticamente dalla superficie al fondo. La temperatura varia tipicamente da circa trenta gradi Celsius nelle acque tropicali superficiali a circa due gradi Celsius nelle acque profonde, mentre la salinità varia da circa trentadue a trentotto grammi per chilogrammo (parti per mille). Queste variazioni producono stratificazione di densità stabile: l'acqua più calda e meno salina galleggia sopra l'acqua fredda e salata. La regione di transizione rapida tra acque superficiali calde e acque profonde fredde, situata tipicamente tra cinquanta e cinquecento metri di profondità, è chiamata termoclina permanente ed è una delle caratteristiche strutturali dominanti dell'oceano.

Le Equazioni Fondamentali dell'Oceanografia Dinamica

La descrizione matematica delle correnti oceaniche parte dalle equazioni di Navier-Stokes in un sistema di riferimento rotante. In coordinate cartesiane locali con x verso est, y verso nord, e z verso l'alto dalla superficie oceanica, le equazioni del moto in approssimazione di Boussinesq sono: ∂u su ∂t più u ∂u su ∂x più v ∂u su ∂y più w ∂u su ∂z meno fv = meno uno su ρ_0 ∂p su ∂x più A_h nabla_h quadro u più A_v $\partial^2 u$ su ∂z^2, e analogamente per v e w, dove u, v, w sono le componenti di velocità verso est, nord e verticale, f = due Ω sin φ è il parametro di Coriolis (φ è la latitudine), ρ_0 è la densità di riferimento, p è la pressione, A_h e A_v sono coefficienti di viscosità turbolenta orizzontale e verticale.

L'equazione di continuità per fluido incomprimibile è: ∂u su ∂x più ∂v su ∂y più ∂w su ∂z = 0. L'equazione idrostatica, che è un'eccellente approssimazione per flussi oceanici a scala sinottica, è: ∂p su ∂z = meno ρg, dove ρ è la densità locale. Le equazioni per temperatura T e salinità S sono: ∂T su ∂t più u·∇T = K_h nabla_h quadro T più K_v ∂²T su ∂z² più Q_T, ∂S su ∂t più u·∇S = K_h nabla_h quadro S più K_v ∂²S su ∂z² più Q_S, dove K_h e K_v sono diffusività turbolente e Q_T, Q_S rappresentano sorgenti (riscaldamento solare, evaporazione, precipitazione).

La densità dipende da temperatura, salinità e pressione secondo un'equazione di stato non lineare. In forma linearizzata attorno a valori di riferimento: ρ = ρ₀[uno meno α(T meno T₀) più β(S meno S₀)], dove α circa uguale due per dieci alla meno quattro per kelvin è il coefficiente di espansione termica e β circa uguale otto per dieci alla meno quattro per grammo per chilogrammo è il coefficiente di contrazione salina.

L'Equilibrio Geostrofico e le Correnti Oceaniche

Per correnti oceaniche a grande scala (centinaia di chilometri), il bilancio dominante nell'equazione del moto orizzontale non è tra accelerazione locale e forze applicate, ma tra forza di Coriolis e gradiente di pressione. Questo equilibrio, chiamato equilibrio geostrofico, si scrive: meno fv = meno uno su ρ₀ ∂p su ∂x, fu = meno uno su ρ₀ ∂p su ∂y.

L'equilibrio geostrofico implica che il flusso è parallelo alle isobare (linee di pressione costante), con la pressione alta alla destra del flusso nell'emisfero nord e alla sinistra nell'emisfero sud. Questa è la ragione per cui i giri oceanici (grandi sistemi di correnti circolari) ruotano in senso orario nell'emisfero nord e antiorario nell'emisfero sud.

Combinando l'equilibrio geostrofico con l'equazione idrostatica, si ottiene la relazione termica del vento che lega il taglio verticale della velocità orizzontale al gradiente orizzontale di densità: f ∂v su ∂z = meno g su ρ₀ ∂ρ su ∂x, f ∂u su ∂z = g su ρ₀ ∂ρ su ∂y. Queste equazioni mostrano che correnti superficiali intense (con forte taglio verticale) sono associate a gradienti laterali di densità pronunciati – precisamente ciò che si osserva in correnti come il Gulf Stream.

Il trasporto geostrofico integrato verticalmente può essere calcolato se si conosce la struttura di densità. Definendo il geopotenziale Φ(p) = ∫_p^{p_0} α dp dove α = uno su ρ è il volume specifico, il trasporto tra due livelli di pressione p_1 e p_2 è proporzionale alla differenza di geopotenziale ΔΦ = Φ(p_2) meno Φ(p_1) tra due stazioni. Questo è il fondamento del metodo dinamico utilizzato storicamente per calcolare correnti da misure idrogra fiche di temperatura e salinità.

Il Gulf Stream: Anatomia di una Corrente di Confine Occidentale

Il Gulf Stream è forse la corrente oceanica più studiata e celebre, trasportando circa trenta milioni di metri cubi al secondo (trenta Sverdrup) di acqua calda dall'equatore verso il Nord Atlantico. Questa enorme corrente, larga circa cento chilometri e profonda fino a mille metri, è la manifestazione principale del giro subtropicale dell'Atlantico Nord.

Il Gulf Stream inizia come Florida Current nello stretto tra Florida e Bahamas, dove le acque calde del Mar dei Caraibi vengono canalizzate verso nord. Fluendo lungo la costa orientale

degli Stati Uniti, la corrente accelera fino a raggiungere velocità superficiali massime di circa due metri al secondo (oltre sette chilometri all'ora) al largo di Cape Hatteras. Qui la corrente si separa dalla costa e fluisce verso est attraverso l'Atlantico come corrente del Nord Atlantico.

La teoria classica che spiega l'esistenza e l'intensificazione delle correnti di confine occidentale come il Gulf Stream fu sviluppata da Stommel nel 1948 e raffinata da Munk nel 1950. L'ingrediente cruciale è la variazione del parametro di Coriolis con la latitudine, chiamata effetto β: f = f_0 più βy, dove β = df su dy circa uguale due per dieci alla meno undici metri alla meno uno secondi alla meno uno.

Consideriamo il bilancio di vorticità per un oceano forzato da stress del vento sulla superficie. In regime stazionario e linearizzato, l'equazione è: β ∂ψ su ∂x = uno su ρ_0H curl_z(τ) più r nabla quadro ψ, dove ψ è la funzione di corrente (u = meno ∂ψ su ∂y, v = ∂ψ su ∂x), H è la profondità dell'oceano, τ è lo stress del vento, e r è un coefficiente di attrito.

Questa equazione, nota come equazione di Stommel, mostra che il curl dello stress del vento (che ha un massimo alle medie latitudini) guida la circolazione, mentre il termine βy fornisce un meccanismo di dissipazione che permette soluzioni stazionarie. La soluzione in un bacino rettangolare mostra intensificazione della corrente in uno strato limite di spessore δ_M = radice quadrata di (r su β) lungo il margine occidentale.

Con r circa dieci alla meno sette secondi alla meno uno (rappresentando attrito sul fondo o mixing laterale), otteniamo δ_M circa cento chilometri, consistente con la larghezza osservata del Gulf Stream. Nel margine orientale, per contrasto, le correnti sono deboli e diffuse su scale di migliaia di chilometri (la Corrente delle Canarie nell'Atlantico orientale è molto meno intensa del Gulf Stream).

Il meccanismo fisico è il seguente: lo stress del vento genera convergenza di Ekman nell'oceano subtropicale, pompando acqua verso il basso e creando accumulo di massa (innalzamento della superficie oceanica). Questo accumulo produce un gradiente di pressione che guida correnti verso sud nell'interior dell'oceano. Tuttavia, il flusso verso sud comporta diminuzione di f (muovendosi verso sud, f diminuisce), che richiederebbe creazione di vorticità planetaria negativa. Per conservare vorticità totale, deve essere creata vorticità relativa positiva (ciclonica nell'emisfero nord), che implica turning del flusso verso nord. Questo turning può avvenire solo vicino a un confine, dove l'attrito può fornire vorticità. Il confine occidentale è selezionato perché β è positivo (f cresce verso nord).

Instabilità Baroclinica e Vortici Mesoscalici

Il Gulf Stream e altre correnti intense non sono flussi laminari ma altamente turbolenti, con formazione continua di vortici mesoscalici (eddies) con scale tipiche di cinquanta-duecento chilometri. Questi vortici trasportano energia, calore e altre proprietà, giocando un ruolo cruciale nel bilancio energetico oceanico.

La sorgente energetica per i vortici mesoscalici è l'instabilità baroclinica della corrente principale. Correnti geostrof iche con forte taglio verticale (associato a gradienti laterali di densità) sono potenzialmente instabili a perturbazioni ondulatorii che estraggono energia potenziale disponibile dalla struttura verticale.

La teoria lineare dell'instabilità baroclinica, sviluppata da Eady e Charney per l'atmosfera ma applicabile anche agli oceani, predice che la lunghezza d'onda di massima crescita è λ_max circa uguale tre virgola nove volte il raggio di deformazione di Rossby L_R = NH su f, dove N è la frequenza di Brunt-Väisälä (misura della stratificazione) e H è la scala verticale della corrente.

Per l'oceano, con N circa dieci alla meno due secondi alla meno uno, H circa mille metri, f circa dieci alla meno quattro secondi alla meno uno, otteniamo L_R circa cento chilometri e λ_max circa quattrocento chilometri. Questo è notevolmente consistente con le scale osservate dei meandri del Gulf Stream e dei vortici che si staccano da esso (rings).

I vortici hanno polarità diversa: vortici ciclonici (rotazione antioraria nell'emisfero nord) tendono ad avere core freddo e denso, mentre vortici anticiclonici hanno core caldo e leggero. I cold-core rings che si staccano dal lato nord del Gulf Stream possono trasportare acqua fredda dalla costa verso il mare aperto, mentre warm-core rings dal lato sud trasportano acqua tropicale verso nord, contribuendo significativamente al trasporto di calore meridionale.

La Circolazione Termoalina e il Nastro Trasportatore Globale

Oltre alla circolazione guidata dal vento negli strati superficiali, esiste una circolazione profonda guidata da differenze di densità (temperatura e salinità) chiamata circolazione termoalina (THC). Questa circolazione opera su scale temporali molto più lunghe (secoli-millenni) e coinvolge l'intero oceano verticalmente.

Il concetto del "nastro trasportatore globale" (global conveyor belt), proposto da Broecker, fornisce una rappresentazione semplificata della THC: acqua superficiale calda fluisce verso nord nell'Atlantico; nel Nord Atlantico subisce raffreddamento intenso e aumento di salinità (per formazione di ghiaccio marino), diventando sufficientemente densa da affondare formando North Atlantic Deep Water (NADW); questa acqua profonda fluisce verso sud lungo il fondo dell'Atlantico, circumnaviga l'Antartide, si divide tra Oceano Indiano e Pacifico dove gradualmente risale, e ritorna in superficie; il ritorno verso l'Atlantico avviene principalmente via corrente di Agulhas (dal Sud Africa) e attraverso il passaggio Indonesiano, chiudendo il ciclo.

Il tasso di formazione di NADW è stimato circa quindici-venti Sverdrup, significativamente minore del trasporto delle correnti guidate dal vento (il Gulf Stream trasporta trenta Sverdrup), ma cruciale per il bilancio di calore globale perché trasporta calore in profondità. Il tempo di ricircolo completo del nastro trasportatore è circa mille-duemila anni, come evidenziato da datazioni con carbonio quattordici e traccianti chimici nelle acque profonde.

La stabilità della THC è una questione critica per il clima. Modelli matematici semplificati (box models) mostrano che la THC può esistere in stati multipli stabili. Consideriamo un modello a due box rappresentanti regione polare (box P) e regione equatoriale (box E), con temperature T_P, T_E e salinità S_P, S_E. Il trasporto è proporzionale alla differenza di densità: q = k[α(T_E meno T_P) meno β(S_E meno S_P)], dove il primo termine (temperatura) favorisce circolazione, mentre il secondo (salinità) può opporsi se S_E è maggiore di S_P.

Le equazioni di bilancio sono: dT_P su dt = (forze radiative) più q(T_E meno T_P), dS_P su dt = (evaporazione meno precipitazione) più q(S_E meno S_P). Questo sistema può avere: (i) uno stato "on" con circolazione forte (q grande), (ii) uno stato "off" con circolazione debole o inversa (q piccolo o negativo), (iii) entrambi come stati stabili separati da un stato instabile (biforcazione).

La possibilità di collasso della THC in risposta a perturbazioni (come immissione di acqua dolce dal disgelo di calotte glaciali) ha importanti implicazioni climatiche. Durante l'ultima deglaciazione, ci furono episodi di arrestamento della THC (eventi di Heinrich e Younger Dryas) associati a cambiamenti climatici rapidi e drammatici, specialmente nell'Atlantico Nord che si raffreddò di diversi gradi in pochi decenni.

Le Maree Oceaniche: Soluzioni di Laplace e Maree Reali

Le maree oceaniche sono oscillazioni periodiche del livello del mare causate dalle forze gravitazionali di Luna e Sole. La teoria classica, sviluppata da Laplace nel diciottesimo secolo, fornisce il quadro matematico fondamentale.

L'equazione di Laplace per le maree deriva dalle equazioni del moto in acqua poco profonda su una sfera rotante, forzate dal potenziale di marea: ∂η su ∂t più H nabla·u = 0, ∂u su ∂t più f cappello z cross u più g nabla η = nabla V_marea, dove η è l'elevazione della superficie, u è la velocità orizzontale mediata verticalmente, H è la profondità oceanica, e V_marea è il potenziale di marea.

Per maree con frequenza σ, cercando soluzioni armoniche $\eta = \eta_0 \exp(-i\sigma t)$, si ottiene un sistema di equazioni che, eliminando la velocità, porta all'equazione per η_0: nabla·(H nabla η_0) più [σ^2 meno f^2 su gH]η_0 = (forze di marea). Questa equazione mostra che la risposta dell'oceano dipende criticamente dal rapporto tra σ^2 e f^2: quando σ è vicino a f (frequenze mareali diurne alle medie latitudini), si hanno fenomeni di risonanza.

La soluzione completa richiede sviluppo in funzioni di Hough, che sono generalizzazioni delle armoniche sferiche includendo rotazione. Per un oceano sferico di profondità costante, le autofunzioni sono onde di Poincaré, onde di Kelvin, e onde di Rossby-gravity. Le maree reali sono sovrapposizione di questi modi, con ampiezze determinate dalle forze di marea e dalla geometria oceanica.

Le maree reali differiscono significativamente dalla teoria idealizzata per effetti della topografia, coste, e attrito. La presenza di continenti modifica drasticamente la propagazione delle onde mareali, creando sistemi anfidr omici: punti dove l'ampiezza di marea è nulla, attorno ai quali le linee di fase (cotidal lines) ruotano. Nell'Atlantico Nord, per esempio, ci sono diversi punti anfid romici per la componente semidiurna M_2 (periodo dodici virgola quattro due ore), con rotazione ciclonica attorno a ciascuno.

Il dissipamento di energia mareale negli oceani è circa tre virgola sette terawatt, principalmente in mari poco profondi (due virgola cinque terawatt) e per generazione di onde interne da maree che interagiscono con topografia oceanica ripida (uno virgola due terawatt). Questo dissipamento rallenta la rotazione terrestre, aumentando la lunghezza del giorno di due virgola tre millisecondi per secolo, e causa allontanamento della Luna di tre virgola otto centimetri per anno.

Le Onde Interne: Propagazione e Rottura

Le onde interne sono oscillazioni che si propagano all'interno dell'oceano lungo superfici di densità costante (isopicne), analogamente a come le onde superficiali si propagano lungo l'interfaccia aria-acqua. Tuttavia, le onde interne hanno frequenze molto più basse e lunghezze d'onda molto più grandi delle onde superficiali di energia comparabile, perché il contrasto di densità tra strati oceanici è molto minore del contrasto aria-acqua.

Per un oceano stratificato con frequenza di Brunt-Väisälä N(z), le onde interne soddisfano una relazione di dispersione notevole: ω² = N² k_h² su (k_h² più k_z²) più f², dove ω è la frequenza angolare, k_h è il numero d'onda orizzontale, k_z è il numero d'onda verticale, e f è il parametro di Coriolis. Questa relazione implica che la frequenza è vincolata: f minore uguale ω minore uguale N.

Una proprietà sorprendente è che la direzione di propagazione dell'energia (velocità di gruppo) è perpendicolare alla direzione di fase (vettore d'onda). Per un'onda interna con vettore d'onda k che forma angolo θ con l'orizzontale, la velocità di gruppo forma angolo (novanta gradi meno θ) con l'orizzontale. Questo significa che se un'onda ha fase che si propaga verso l'alto e orizzontalmente, l'energia si propaga verso il basso e orizzontalmente.

Le onde interne possono essere generate da diversi meccanismi: (i) flusso di marea sopra topografia ripida genera onde interne con frequenza mareale (internal tides); (ii) vento sulla superficie oceanica genera onde interne vicino alla termoclina; (iii) interazione di correnti con topografia; (iv) rilassamento di fronti oceanici.

Le internal tides generate su topografia ripida (come catene montuose sottomarine) possono propagarsi per centinaia di chilometri prima di dissipare la loro energia. Questa energia viene trasferita alla turbolenza su piccola scala attraverso rottura delle onde, contribuendo al mixing verticale che è essenziale per mantenere la stratificazione oceanica contro il riscaldamento superficiale.

Il processo di rottura delle onde interne avviene quando l'ampiezza diventa abbastanza grande che il taglio verticale indotto supera un valore critico, causando instabilità di Kelvin-Helmholtz. Il criterio è che il numero di Richardson Ri = N² su (∂u su ∂z)² cada sotto circa zero virgola venticinque. Quando questo avviene, si formano billows turbolenti che dissipano energia e mescolano le proprietà dell'acqua verticalmente.

Osservazioni da profiler acustici Doppler (ADCP) e da profilatori CTD (Conductivity-Temperature-Depth) mostrano che la rottura di onde interne è ubiqua negli oceani, con eventi di mixing intenso che avvengono sporadicamente ma contribuiscono significativamente al bilancio energetico e al trasporto verticale di proprietà.

Lo Strato Limite di Ekman: Teoria e Osservazioni

Vicino alla superficie oceanica, lo stress del vento genera uno strato limite turbolento chiamato strato di Ekman, dove l'effetto della viscosità (turbolenta) modifica significativamente il bilancio geostrofico.

La teoria classica di Ekman (1905) considera un oceano omogeneo semi-infinito con stress τ applicato sulla superficie. L'equazione del moto in stato stazionario, con viscosità verticale A_v costante, è: meno fv = A_v ∂²u su ∂z², fu = A_v ∂²v su ∂z², con condizioni al contorno ρ₀A_v ∂u su ∂z|*{z=0} = τ_x, ρ₀A_v ∂v su ∂z*|{z=0} = τ_y, e u, v tendenti a zero per z tendente a meno infinito.

La soluzione è: u = U_0 exp(z su δ_E) cos(π su quattro più z su δ_E), v = U_0 exp(z su δ_E) sin(π su quattro più z su δ_E), dove δ_E = radice quadrata di (due A_v su f) è la profondità di Ekman e U_0 = τ su (ρ₀ radice quadrata di (A_v f)). Questa soluzione mostra che la velocità ruota in senso orario (nell'emisfero nord) con la profondità, formando una spirale di Ekman.

Sulla superficie, la velocità forma un angolo di quarantacinque gradi con lo stress del vento, deflessa a destra (emisfero nord). Il trasporto integrato verticalmente, chiamato trasporto di Ekman, è M_E = ∫_{meno infinito}^0 u dz = cappello z cross τ su (ρ₀f), cioè perpendicolare allo stress del vento, novanta gradi a destra nell'emisfero nord.

Osservazioni oceanografiche mostrano deviazioni dalla teoria classica: la profondità di Ekman osservata è tipicamente più piccola (venti-cinquanta metri) di quella prevista con stime ragionevoli di A_v, la rotazione della velocità con la profondità è spesso meno regolare della spirale idealizzata, e la direzione superficiale è spesso deflessa meno di quarantacinque gradi. Queste discrepanze riflettono la complessità della turbolenza nello strato superficiale, con mixing che dipende fortemente dalla stabilità stratificazione (raffreddamento notturno stabilizza, riscaldamento diurno destabilizza) e dalla storia del vento.

Nonostante queste complicazioni, il concetto di trasporto di Ekman rimane fondamentale. Il trasporto di Ekman divergente (upwelling) o convergente (downwelling) guida la circolazione verticale che accoppia superficie e interior dell'oceano. Nelle regioni dove i venti paralleli alla costa causano trasporto di Ekman offshore, si ha upwelling costiero che porta acqua fredda e ricca di nutrienti in superficie, sostenendo ecosistemi marini produttivi (come al largo del Perù, California, Africa occidentale).

presenta una delle discipline scientifiche più stimolanti e complesse, collocandosi all'intersezione tra la fisica, la matematica, la geologia e le scienze ambientali. Essa si propone di comprendere i processi fisici che governano il nostro pianeta, dalla sua struttura interna profonda fino alle manifestazioni superficiali, dalle oscillazioni sismiche che attraversano il mantello terrestre alle correnti oceaniche che ridistribuiscono il calore globale, dai campi magnetici generati nel nucleo esterno liquido alle onde gravitazionali che perturbano impercettibilmente la forma del geoide.

La matematica costituisce il linguaggio fondamentale attraverso cui possiamo descrivere, modellare e prevedere i fenomeni geofisici. Senza gli strumenti matematici appropriati, la nostra comprensione della Terra rimarrebbe limitata a descrizioni qualitative e osservazioni empiriche disconnesse. È attraverso le equazioni differenziali parziali che descriviamo la propagazione delle onde sismiche; attraverso la teoria del potenziale che interpretiamo le anomalie gravitazionali e magnetiche; attraverso l'analisi armonica sferica che rappresentiamo i campi globali; attraverso la teoria dell'elasticità che comprendiamo le deformazioni della crosta terrestre.

Questo trattato si propone di esaminare le basi matematiche della geofisica moderna, partendo dai principi fondamentali della fisica matematica e procedendo verso applicazioni sempre più specifiche e sofisticate. Esamineremo come i concetti astratti della matematica pura trovino realizzazione concreta nei fenomeni terrestri, e come viceversa le sfide poste dalla comprensione del sistema Terra abbiano stimolato lo sviluppo di nuove tecniche matematiche.

FONDAMENTI DELLA MECCANICA DEL CONTINUO E TEORIA ELASTICA

Capitolo 1: I Fondamenti della Meccanica del Continuo

La maggior parte dei fenomeni geofisici può essere descritta utilizzando il formalismo della meccanica del continuo, che tratta la materia come un mezzo continuo piuttosto che come un insieme discreto di particelle. Questa approssimazione è giustificata quando le scale di lunghezza dei fenomeni che ci interessano sono molto maggiori delle scale atomiche o molecolari, condizione che è certamente soddisfatta per la quasi totalità dei processi geofisici.

1.1 Il Concetto di Campo e le Descrizioni Lagrangiana ed Euleriana

Il punto di partenza della meccanica del continuo è il concetto di **campo**. Un campo è una funzione che assegna a ogni punto dello spazio e a ogni istante temporale una quantità fisica di interesse. Possiamo avere:

- **Campi scalari**: come la densità $\rho(x,y,z,t)$ o la temperatura $T(x,y,z,t)$
- **Campi vettoriali**: come la velocità $v(x,y,z,t)$ o il campo magnetico $B(x,y,z,t)$
- **Campi tensoriali**: come il tensore degli sforzi σ_{i}□(x,y,z,t)

La descrizione matematica del movimento di un continuo richiede l'introduzione di due sistemi di coordinate distinti:

Coordinate Lagrangiane: seguono le singole particelle materiali nel loro movimento. Identifichiamo ogni particella materiale mediante la sua posizione iniziale $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ al tempo t = 0, e descriviamo la sua posizione al tempo t mediante la funzione:

$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X},t)$

La funzione χ è chiamata **mappa di deformazione** e deve essere invertibile (biiettiva) e sufficientemente regolare.

Coordinate Euleriane: sono fisse nello spazio. Ci concentriamo su un punto fisso dello spazio **x** e descriviamo le proprietà del materiale che passa per quel punto al tempo t.

La **velocità** in descrizione Lagrangiana è:

$\mathbf{v}(\mathbf{X},t) = \partial\chi(\mathbf{X},t)/\partial t$

mentre in descrizione Euleriana è:

$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\chi^{-1}(\mathbf{x},t),t)$

La relazione tra queste due descrizioni è governata dalla **derivata materiale** (o derivata sostanziale):

$D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$

dove **v** è il campo di velocità e ∇ è l'operatore gradiente. Questa derivata descrive il tasso di variazione di una quantità fisica seguendo il movimento del materiale.

La derivata materiale può essere compresa intuitivamente considerando come cambia una proprietà φ seguendo una particella che si muove. La variazione totale ha due contributi:

1. La variazione locale nel tempo ($\partial\varphi/\partial t$)
2. La variazione dovuta al fatto che la particella si sposta in regioni dove φ ha valori diversi ($\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi$)

Ad esempio, la derivata materiale della densità $D\rho/Dt$ rappresenta la variazione di densità di una particella materiale specifica mentre si muove attraverso lo spazio. Se $D\rho/Dt = 0$, la particella mantiene costante la sua densità anche se si muove attraverso regioni con densità diverse.

1.2 Le Leggi di Conservazione Fondamentali

Le leggi fondamentali della meccanica del continuo sono espresse attraverso principi di conservazione che devono essere soddisfatti in ogni punto del mezzo e in ogni istante temporale.

1.2.1 Conservazione della Massa

La **conservazione della massa** è espressa dall'**equazione di continuità**:

$\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$

Questa equazione afferma che la variazione locale di densità è bilanciata dal flusso di massa attraverso la superficie che racchiude il volume considerato.

Derivazione: Consideriamo un volume di controllo V fissato nello spazio con superficie S. La massa totale contenuta è:

$M(t) = \iiint_V \rho(\mathbf{x},t)\, dV$

Il tasso di variazione della massa è:

$dM/dt = \iiint_V \partial\rho/\partial t\, dV$

Il flusso di massa attraverso la superficie (massa che esce per unità di tempo) è:

$\Phi_{out} = \iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS$

dove **n** è la normale esterna. Per il teorema di Gauss:

$\Phi_{out} = \iiint_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\, dV$

La conservazione della massa richiede che $dM/dt = -\Phi_{out}$, quindi:

$\iiint_V [\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})]\, dV = 0$

Poiché questo deve valere per ogni volume V, l'integrando deve essere identicamente nullo, ottenendo l'equazione di continuità.

Forma Lagrangiana: In coordinate lagrangiane, l'equazione di continuità assume la forma più semplice:

$D\rho/Dt + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$

che si ottiene espandendo la derivata materiale nella forma euleriana.

Caso incomprimibile: Per un fluido incomprimibile (ρ = costante seguendo le particelle), si ha $D\rho/Dt = 0$, e l'equazione di continuità si riduce a:

$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$

Questa è una condizione puramente cinematica sulla velocità, indipendente dalle forze.

1.2.2 Conservazione della Quantità di Moto

La **conservazione della quantità di moto** è espressa dalle **equazioni di Cauchy**:

$\rho\, D\mathbf{v}/Dt = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{f}$

dove **σ** è il **tensore degli sforzi** e **f** rappresenta le **forze di volume per unità di massa**, come la gravità.

Interpretazione fisica: Queste equazioni affermano che l'accelerazione di un elemento di fluido (parte sinistra) è determinata dal gradiente degli sforzi interni (primo termine a destra) e dalle forze esterne (secondo termine a destra).

Il tensore degli sforzi: σ_{ij} rappresenta la forza per unità di area che agisce nella direzione i su una superficie con normale nella direzione j. È un tensore di secondo ordine, quindi una matrice 3×3:

$\sigma = [\sigma_{11}\ \sigma_{12}\ \sigma_{13}]\ [\sigma_{21}\ \sigma_{22}\ \sigma_{23}]\ [\sigma_{31}\ \sigma_{32}\ \sigma_{33}]$

Gli elementi diagonali σ_{ii} sono gli **sforzi normali**, mentre gli elementi fuori diagonale σ_{ij} $(i \neq j)$ sono gli **sforzi di taglio**.

Teorema di Cauchy: Per ogni superficie con normale **n**, la trazione (forza per unità di area) è:

$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$

cioè: $t_i = \sigma_{ij} n_j$ (somma su j)

Simmetria del tensore degli sforzi: In assenza di coppie distribuite, il bilancio del momento angolare richiede che il tensore degli sforzi sia simmetrico:

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Questo riduce le componenti indipendenti da 9 a 6.

Decomposizione del tensore degli sforzi: È conveniente decomporre σ in una parte isotropa (pressione) e una parte deviatorica:

$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}$

dove:

- $p = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ è la pressione media
- δ_{ij} è il delta di Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se i=j, 0 altrimenti)
- s_{ij} è il **tensore deviatorico degli sforzi**, che ha traccia nulla: $s_{ii} = 0$

La pressione governa le variazioni di volume, mentre il tensore deviatorico governa le distorsioni di forma.

1.2.3 Conservazione dell'Energia

La **conservazione dell'energia** completa il quadro delle leggi fondamentali. In forma generale, l'equazione dell'energia può essere scritta come:

$\rho\, De/Dt = \sigma_{ij}\, \partial v_i/\partial x_j - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r$

dove:

- e è l'**energia interna specifica** (per unità di massa)
- **q** è il **flusso di calore**
- r rappresenta **sorgenti interne di energia** come il decadimento radioattivo
- Il termine $\sigma_{i□} \partial v_i/\partial x_{□}$ rappresenta il **lavoro delle forze interne**

Interpretazione: Questa equazione afferma che la variazione di energia interna di una particella è determinata da:

1. Il lavoro compiuto dagli sforzi interni (deformazione)
2. Il flusso di calore entrante
3. Le sorgenti interne di energia

Forma alternativa con entalpia: Per molti flussi è più conveniente lavorare con l'entalpia h = e + p/ρ. L'equazione dell'energia diventa:

$$\rho \, Dh/Dt = Dp/Dt + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + \rho r$$

dove:

- k è la conducibilità termica
- T è la temperatura
- $\Phi = s_{i□} \partial v_i/\partial x_{□}$ è la **funzione di dissipazione viscosa**

Per un fluido newtoniano, Φ è sempre positivo (la dissipazione viscosa converte sempre energia meccanica in calore).

1.3 Le Equazioni Costitutive e la Reologia

Le equazioni di conservazione da sole non sono sufficienti a determinare completamente il comportamento di un mezzo continuo. Il sistema è **sottodeterminato**: abbiamo 5 equazioni scalari (1 di massa, 3 di momento, 1 di energia) ma molte più incognite (ρ, v (3 componenti), σ (6 componenti indipendenti), e, q (3 componenti), T).

Abbiamo bisogno di **equazioni costitutive** che specifichino come il materiale risponde agli sforzi applicati. Queste equazioni dipendono dalla natura fisica del materiale e possono essere estremamente complesse per i materiali terrestri.

1.3.1 Fluido Perfetto (Non Viscoso)

Il caso più semplice è quello di un **fluido perfetto**, per il quale il tensore degli sforzi è puramente isotropo:

$$\sigma_{i□} = -p\delta_{i□}$$

Questa relazione implica che:

1. Un fluido perfetto non può sostenere sforzi di taglio ($s_{i□} = 0$)
2. La pressione agisce ugualmente in tutte le direzioni

Le equazioni del moto per un fluido perfetto sono le **equazioni di Eulero**:

$$\rho(\partial \mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}) = -\nabla p + \rho\mathbf{f}$$

Queste equazioni, pur essendo una semplificazione drastica, catturano la fisica essenziale di molti flussi geofisici dove la viscosità è piccola rispetto ad altri effetti.

1.3.2 Fluido Newtoniano Viscoso

Per un **fluido newtoniano viscoso**, la relazione costitutiva diventa più complessa. Il tensore degli sforzi si decompone in una parte isotropa (la pressione) e una parte deviatorica che dipende dal **tasso di deformazione**:

$$\sigma_{i\square} = -p\delta_{i\square} + \lambda(\partial v_{\square}/\partial x_{\square})\delta_{i\square} + \mu(\partial v_i/\partial x_{\square} + \partial v_{\square}/\partial x_i)$$

dove λ e μ sono i **coefficienti di viscosità di Lamé**.

Interpretazione fisica dei coefficienti:

- μ è chiamato **viscosità dinamica** o **viscosità di taglio**. Controlla la resistenza alle distorsioni di forma.
- λ è la **seconda viscosità**, legata alla resistenza alle deformazioni volumetriche.
- La combinazione $\zeta = \lambda + (2/3)\mu$ è chiamata **viscosità di volume** o **bulk viscosity**

Il tensore del tasso di deformazione: La quantità

$$\varepsilon_{i\square} = (1/2)(\partial v_i/\partial x_{\square} + \partial v_{\square}/\partial x_i)$$

è il **tensore del tasso di deformazione**. È simmetrico per costruzione e rappresenta la parte simmetrica del gradiente di velocità.

Ipotesi di Stokes: Per la maggior parte dei fluidi, si assume che:

$$\lambda + (2/3)\mu = 0$$

cioè $\zeta = 0$. Questa ipotesi è valida quando la viscosità di volume è trascurabile rispetto alla viscosità di taglio. Con questa approssimazione:

$$\sigma_{i\square} = -p\delta_{i\square} + \mu(\partial v_i/\partial x_{\square} + \partial v_{\square}/\partial x_i - (2/3)\delta_{i\square}\partial v_{\square}/\partial x_{\square})$$

Le **equazioni di Navier-Stokes** per un fluido newtoniano incomprimibile ($\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$) sono:

$$\rho(\partial \mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{f}$$

Queste equazioni sono **non lineari** (termine $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$) e notoriamente difficili da risolvere, sia analiticamente che numericamente.

1.3.3 Solidi Elastici

Per i **solidi elastici**, la relazione costitutiva collega gli sforzi alle **deformazioni** piuttosto che ai tassi di deformazione. Nel caso più semplice di un **solido elastico lineare isotropo**, la legge di Hooke generalizzata si scrive:

$\sigma_{i□} = \lambda\varepsilon_{□□}\delta_{i□} + 2\mu\varepsilon_{i□}$

dove $\varepsilon_{i□}$ è il **tensore delle deformazioni infinitesime** definito come:

$\varepsilon_{i□} = (1/2)(\partial u_i/\partial x_{□} + \partial u_{□}/\partial x_i)$

con **u** che rappresenta il campo di **spostamento** (la differenza tra la posizione attuale e quella iniziale di ogni punto materiale).

Interpretazione: Questa legge stabilisce una relazione lineare tra sforzi e deformazioni attraverso due costanti elastiche indipendenti λ e μ (che qui sono diverse dai coefficienti di viscosità, anche se si usano gli stessi simboli per convenzione storica).

Parametri elastici alternativi: I parametri λ e μ sono chiamati **costanti elastiche di Lamé**, ma nella pratica ingegneristica sono più comuni altre coppie di parametri:

- **Modulo di Young** E: misura la rigidezza del materiale in trazione uniassiale
- **Rapporto di Poisson** ν: misura la contrazione laterale durante una trazione longitudinale
- **Modulo di taglio** G = μ: misura la resistenza alle distorsioni di forma
- **Modulo di compressibilità** K: misura la resistenza alle variazioni di volume

Le relazioni tra questi parametri sono:

$\lambda = E\nu/((1+\nu)(1-2\nu))$ $\mu = E/(2(1+\nu))$ $K = E/(3(1-2\nu))$

Limite di incomprimibilità: Quando $\nu \to 0.5$, il materiale diventa incomprimibile ($K \to \infty$). Questo corrisponde a materiali che resistono fortemente alle variazioni di volume ma possono deformarsi facilmente cambiando forma.

Valori tipici per materiali terrestri:

- Rocce crostali: E ≈ 50-100 GPa, ν ≈ 0.25-0.30
- Mantello superiore: E ≈ 200-250 GPa, ν ≈ 0.28-0.30
- Nucleo interno (ferro): E ≈ 200 GPa, ν ≈ 0.30

1.3.4 Reologia Complessa: Viscoelasticità

La reologia dei materiali terrestri è molto più complessa delle idealizzazioni semplici (fluido newtoniano o solido elastico). Il mantello terrestre, ad esempio, si comporta come un solido elastico su scale temporali brevi (secondi o minuti, come durante il passaggio di onde sismiche), ma come un fluido viscoso su scale temporali lunghe (milioni di anni, come nei processi di convezione mantellica).

Questo comportamento è descritto mediante **modelli viscoelastici**, che combinano aspetti elastici e viscosi.

Il modello di Maxwell:

Il modello più semplice è il **modello di Maxwell**, in cui si immagina che il materiale sia rappresentato da una molla (elemento elastico) in serie con un ammortizzatore (elemento viscoso).

L'equazione costitutiva è:

$\dot{\sigma} + (\mu/\eta)\sigma = 2\mu\dot{\varepsilon}$

dove:

- μ è il modulo elastico di taglio
- η è la viscosità
- $\dot{\sigma} = \partial\sigma/\partial t$
- $\dot{\varepsilon} = \partial\varepsilon/\partial t$

Comportamento del modello di Maxwell:

1. **Risposta a uno sforzo costante** (test di creep): Se $\sigma = \sigma_0$ è applicato istantaneamente a t=0, la deformazione evolve come:

   $\varepsilon(t) = (\sigma_0/\mu)[1 + t/(\eta/\mu)]$

   C'è una deformazione elastica istantanea σ_0/μ seguita da deformazione viscosa lineare nel tempo.

2. **Risposta a una deformazione costante** (test di rilassamento): Se $\varepsilon = \varepsilon_0$ è imposta istantaneamente a t=0, lo sforzo decade esponenzialmente:

   $\sigma(t) = 2\mu\varepsilon_0 \exp(-t/\tau_M)$

   dove $\tau_M = \eta/\mu$ è il **tempo di rilassamento di Maxwell**.

Significato del tempo di Maxwell: Questo parametro controlla la transizione tra comportamento elastico ($t << \tau_M$) e comportamento viscoso ($t >> \tau_M$):

- Per processi rapidi (durata $<< \tau_M$): comportamento elastico
- Per processi lenti (durata $>> \tau_M$): comportamento viscoso

Valori tipici per il mantello: Con $\mu \approx 10^{11}$ Pa e $\eta \approx 10^{21}$ Pa·s:

$\tau_M \approx 10^{10}$ s ≈ 300 anni

Questo spiega perché:

- Le onde sismiche (periodo di secondi) vedono il mantello come elastico
- Il rimbalzo post-glaciale (scala di migliaia di anni) mostra comportamento viscoso
- La convezione mantellica (scala di milioni di anni) è completamente viscosa

Modelli più complessi:

Altri modelli viscoelastici includono:

1. **Modello di Kelvin-Voigt**: molla e ammortizzatore in parallelo $\sigma = 2\mu\varepsilon + 2\eta\dot{\varepsilon}$
2. **Modello di Burgers**: combinazione serie-parallelo di Maxwell e Kelvin-Voigt
3. **Modelli non lineari**: per grande deformazioni, il comportamento non è lineare

La legge di potenza (power-law creep):

Per descrivere il comportamento reologico complesso del mantello, sono stati sviluppati modelli più sofisticati che includono dipendenze non lineari dalla temperatura, dalla pressione e dal tasso di deformazione. La **legge di potenza** è particolarmente importante:

$$\dot{\varepsilon} = A \sigma^n \exp(-Q/(RT))$$

dove:

- A è un fattore pre-esponenziale che dipende dal materiale
- n è l'esponente della legge di potenza (tipicamente n = 3-5 per il mantello)
- Q è l'energia di attivazione (tipicamente Q ≈ 300-500 kJ/mol)
- R è la costante dei gas (8.314 J/(mol·K))
- T è la temperatura assoluta

Interpretazione fisica:

- L'esponente n > 1 significa che il tasso di deformazione cresce più che linearmente con lo sforzo (comportamento **non newtoniano**)
- Il termine esponenziale exp(-Q/(RT)) cattura la forte dipendenza dalla temperatura: raddoppiando T (in scala assoluta), il tasso di deformazione può aumentare di ordini di grandezza
- A alta temperatura e/o alto sforzo, la deformazione è molto più rapida

Questa legge descrive la **deformazione dislocation creep**, il meccanismo dominante di deformazione nel mantello terrestre su scale geologiche.

Capitolo 2: La Teoria dell'Elasticità Lineare

La teoria dell'elasticità lineare fornisce il fondamento matematico per comprendere la propagazione delle onde sismiche e le deformazioni della crosta terrestre. Questa teoria assume che le deformazioni siano sufficientemente piccole che la relazione tra sforzi e deformazioni possa essere linearizzata, e che il materiale ritorni allo stato originale quando gli sforzi vengono rimossi.

2.1 L'Equazione Fondamentale dell'Elastodinamica

Combinando la legge di Hooke generalizzata:

$\sigma_{i□} = \lambda\varepsilon_{□□}\delta_{i□} + 2\mu\varepsilon_{i□}$

con il tensore delle deformazioni:

$\varepsilon_{i□} = (1/2)(\partial u_i/\partial x_{□} + \partial u_{□}/\partial x_i)$

e le equazioni del moto (seconda legge di Newton):

$\rho\, \partial^2 u_i/\partial t^2 = \partial \sigma_{i□}/\partial x_{□} + \rho f_i$

otteniamo l'**equazione fondamentale dell'elastodinamica**:

$\rho\, \partial^2 \mathbf{u}/\partial t^2 = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{f}$

dove **u** è il vettore spostamento e **f** rappresenta le forze di volume per unità di massa.

Forma in componenti: In notazione indiciale (che è più esplicita per i calcoli):

$\rho\, \partial^2 u_i/\partial t^2 = (\lambda+\mu)\, \partial^2 u_{□}/\partial x_i \partial x_{□} + \mu\, \partial^2 u_i/\partial x_{□}\partial x_{□} + \rho f_i$

Questa è un'equazione vettoriale che in realtà rappresenta **tre equazioni scalari accoppiate**, una per ogni componente dello spostamento.

2.2 Il Teorema di Decomposizione di Helmholtz

Un risultato fondamentale della teoria è il **teorema di decomposizione di Helmholtz**, che afferma che qualsiasi campo vettoriale sufficientemente regolare (e con opportune condizioni al contorno) può essere decomposto in una parte **irrotazionale** (gradiente di un potenziale scalare) e una parte **solenoidale** (rotore di un potenziale vettoriale):

$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}$

dove:

- φ è il **potenziale scalare** (associato alle onde di compressione)
- $\boldsymbol{\psi}$ è il **potenziale vettoriale** (associato alle onde di taglio)
- Con la condizione di gauge: $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi} = 0$ (gauge di Coulomb)

Proprietà matematiche:

La parte potenziale $\nabla\varphi$ ha rotore nullo: $\nabla\times(\nabla\varphi) = \mathbf{0}$ identicamente

La parte solenoidale $\nabla\times\boldsymbol{\psi}$ ha divergenza nulla: $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\psi}) = 0$ identicamente

Queste proprietà seguono da identità vettoriali fondamentali.

2.3 Disaccoppiamento delle Equazioni: Onde P e Onde S

Applicando la decomposizione di Helmholtz all'equazione dell'elastodinamica, e utilizzando le identità vettoriali:

$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla^2(\nabla \varphi) + \nabla(\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\psi})) = \nabla^2(\nabla \varphi)$

$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2(\nabla \varphi) + \nabla^2(\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \nabla(\nabla^2 \varphi) + \nabla \times (\nabla^2 \boldsymbol{\psi})$

otteniamo due equazioni **disaccoppiate**:

Equazione per il potenziale scalare φ (onde longitudinali o onde P):

$\partial^2 \varphi / \partial t^2 = \alpha^2 \nabla^2 \varphi + F_P$

dove:

$\alpha = \sqrt{((\lambda + 2\mu)/\rho)}$

è la **velocità delle onde P** (primarie o di compressione), e F_P contiene i contributi delle forze esterne.

Equazione per il potenziale vettoriale ψ (onde trasversali o onde S):

$\partial^2 \boldsymbol{\psi} / \partial t^2 = \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} + \mathbf{F}_S$

dove:

$\beta = \sqrt{(\mu/\rho)}$

è la **velocità delle onde S** (secondarie o di taglio), e **F**_S contiene i contributi delle forze esterne.

Interpretazione fisica:

1. **Onde P**: Le particelle oscillano nella direzione di propagazione dell'onda (movimento longitudinale). Queste onde coinvolgono variazioni di volume e sono quindi influenzate sia da λ che da μ.

2. **Onde S**: Le particelle oscillano perpendicolarmente alla direzione di propagazione (movimento trasversale). Queste onde coinvolgono solo distorsioni di forma senza variazione di volume, quindi dipendono solo da μ.

Relazione tra le velocità:

Poiché λ e μ sono entrambi positivi per materiali stabili (condizione di stabilità termodinamica), si ha sempre:

$\alpha > \beta$

Tipicamente: $\alpha \approx \sqrt{3}\ \beta$

Questo spiega perché le onde P arrivano prima delle onde S in una registrazione sismica (da qui i nomi "primarie" e "secondarie").

Valori numerici per materiali terrestri:

Per la crosta superficiale:

- $\lambda \approx 30$ GPa, $\mu \approx 30$ GPa, $\rho \approx 2700$ kg/m³
- $\alpha \approx 6$ km/s, $\beta \approx 3.5$ km/s

Per il mantello inferiore:

- $\lambda \approx 300$ GPa, $\mu \approx 300$ GPa, $\rho \approx 5500$ kg/m³
- $\alpha \approx 13$ km/s, $\beta \approx 7$ km/s

2.4 Soluzioni di Onde Piane

Soluzioni particolarmente importanti delle equazioni elastiche sono le **onde piane**, della forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A} \exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t))$$

dove:

- $\mathbf{A}$ è il vettore ampiezza (può essere complesso)
- $\mathbf{k}$ è il **vettore d'onda** (direzione e lunghezza d'onda)
- ω è la **pulsazione** (frequenza angolare)
- La lunghezza d'onda: $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$
- La frequenza: $f = \omega/(2\pi)$

Sostituendo questa forma nell'equazione dell'elastodinamica (senza forze esterne), otteniamo:

$$-\rho\omega^2\mathbf{A} = -(\lambda+\mu)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})\mathbf{k} - \mu|\mathbf{k}|^2\mathbf{A}$$

Questa è un'equazione algebrica per $\mathbf{A}$.

Onde P pure: Se $\mathbf{A}$ è parallelo a $\mathbf{k}$ (onda longitudinale):

$$\mathbf{A} = A_P \hat{\mathbf{k}}$$

dove $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ è il versore nella direzione di propagazione. L'equazione diventa:

$$-\rho\omega^2 = -(\lambda+2\mu)|\mathbf{k}|^2$$

da cui:

$$\omega^2 = [(\lambda+2\mu)/\rho]|\mathbf{k}|^2 = \alpha^2|\mathbf{k}|^2$$

Questo dà la **relazione di dispersione** per le onde P:

$\omega = \alpha|\mathbf{k}|$

La velocità di fase è $v_{ph} = \omega/|\mathbf{k}| = \alpha$, indipendente da ω (onde **non dispersive**).

Onde S pure: Se **A** è perpendicolare a **k** (onda trasversale):

$\mathbf{k}\cdot\mathbf{A} = 0$

L'equazione diventa:

$-\rho\omega^2 = -\mu|\mathbf{k}|^2$

da cui:

$\omega^2 = (\mu/\rho)|\mathbf{k}|^2 = \beta^2|\mathbf{k}|^2$

La relazione di dispersione per le onde S è:

$\omega = \beta|\mathbf{k}|$

Di nuovo: $v_{ph} = \beta$, indipendente da ω (non dispersive).

Polarizzazione delle onde S:

Poiché **A** deve essere perpendicolare a **k** ma può avere qualsiasi orientazione nel piano perpendicolare, le onde S ammettono due polarizzazioni indipendenti:

1. **SV** (Shear Vertical): oscillazione nel piano verticale contenente la direzione di propagazione
2. **SH** (Shear Horizontal): oscillazione orizzontale, perpendicolare al piano verticale

Questa degenerazione delle onde S è rotta in mezzi anisotropi o in presenza di confini.

2.5 Energia delle Onde Elastiche

Le onde elastiche trasportano energia. Per onde piane armoniche, la densità di energia (energia per unità di volume) ha due contributi:

Energia cinetica:

$e_{kin} = (1/2)\rho|\partial\mathbf{u}/\partial t|^2 = (1/2)\rho\omega^2|\mathbf{A}|^2$

Energia potenziale elastica:

$e_{pot} = (1/2)[\lambda(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 + \mu|\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T|^2]$

Per onde P: $e_{pot} = (1/2)(\lambda+2\mu)|\mathbf{k}|^2|\mathbf{A}|^2 = (1/2)\rho\alpha^2|\mathbf{k}|^2|\mathbf{A}|^2$

Usando $\omega = \alpha|\mathbf{k}|$: $e_{pot} = (1/2)\rho\omega^2|\mathbf{A}|^2$

Quindi: $e_{kin} = e_{pot}$ (equipartizione dell'energia)

L'energia totale per unità di volume è:

$e_total = \rho\omega^2|\mathbf{A}|^2$

Il **flusso di energia** (vettore di Poynting elastico) è:

$\mathbf{S} = -\tilde{\sigma}\cdot(\partial\mathbf{u}/\partial t)$

dove $\tilde{\sigma}$ è la parte oscillante del tensore degli sforzi. Per onde P:

$|\mathbf{S}| = \rho\omega^2\alpha|\mathbf{A}|^2\,\hat{\mathbf{k}}$

L'intensità (energia per unità di area per unità di tempo) che attraversa una superficie perpendicolare alla propagazione è:

$I = \rho\omega^2\alpha|\mathbf{A}|^2$

Questa quantità è fondamentale per comprendere come l'energia sismica si propaga e si attenua nella Terra.

2.6 Attenuazione delle Onde: Fattore di Qualità Q

Nella Terra reale, le onde sismiche vengono attenuate per vari meccanismi di dissipazione (anelasticità, scattering, ecc.). L'attenuazione è quantificata dal **fattore di qualità Q**:

$Q^{-1} = \Delta E/(2\pi E)$

dove ΔE è l'energia dissipata per ciclo ed E è l'energia massima immagazzinata durante il ciclo.

Per un'onda piana che si propaga nella direzione x, l'ampiezza decade esponenzialmente:

$A(x) = A_0 \exp(-\alpha x)$

dove α è il **coefficiente di attenuazione**, legato a Q da:

$\alpha = \omega/(2vQ)$

Con v = velocità dell'onda.

La **distanza di attenuazione** (distanza su cui l'ampiezza decade di un fattore e) è:

$x_att = 1/\alpha = 2vQ/\omega = (Q/\pi)\lambda$

Per Q = 200 (valore tipico per il mantello), l'attenuazione diventa significativa dopo circa 60 lunghezze d'onda.

Valori tipici di Q:

- Crosta: Q ≈ 100-400
- Mantello superiore: Q ≈ 80-600

- Mantello inferiore: Q ≈ 200-600
- Nucleo esterno: Q ≈ 10000 (poco attenuante)

Capitolo 3: La Propagazione delle Onde in Mezzi Stratificati

La Terra non è un mezzo omogeneo, ma presenta una struttura stratificata con proprietà che variano con la profondità. La comprensione della propagazione delle onde sismiche in mezzi stratificati è fondamentale per l'interpretazione dei sismogrammi e per la determinazione della struttura interna della Terra.

3.1 Riflessione e Rifrazione a un'Interfaccia

Consideriamo prima il caso più semplice di un'onda piana che incide su un'interfaccia piana tra due mezzi elastici con proprietà diverse.

Quando l'onda incidente colpisce l'interfaccia, si generano in generale **quattro onde**:

1. Un'**onda P riflessa** nel primo mezzo
2. Un'**onda S riflessa** nel primo mezzo
3. Un'**onda P trasmessa** nel secondo mezzo
4. Un'**onda S trasmessa** nel secondo mezzo

Questo fenomeno di **conversione di modo** è caratteristico dei mezzi elastici e non ha analogo nelle onde acustiche scalari.

Condizioni al contorno: All'interfaccia devono essere soddisfatte le condizioni di continuità:

1. **Continuità dello spostamento**: $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$
2. **Continuità della trazione**: $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n}$

dove l'apice indica il mezzo e **n** è la normale all'interfaccia.

Queste sono 6 condizioni scalari (3 per lo spostamento, 3 per la trazione) che determinano le ampiezze delle 4 onde generate (più il vincolo cinematico di fase-matching).

3.2 La Legge di Snell Generalizzata

Consideriamo un sistema di coordinate con l'asse z perpendicolare all'interfaccia (rivolta verso il basso nel mezzo 2) e l'asse x nel piano di incidenza. Per un'onda P incidente con angolo θ_P rispetto alla normale:

Principio di continuità di fase: Tutte le onde (incidente, riflessa, trasmesse) devono avere la stessa componente del vettore d'onda parallela all'interfaccia. Questo deriva dalla continuità dello spostamento e dalla forma delle onde piane.

Questo porta alla **legge di Snell generalizzata**:

$\sin(\theta_P^{(1)})/\alpha_1 = \sin(\theta_S^{(1)})/\beta_1 = \sin(\theta_P^{(2)})/\alpha_2 = \sin(\theta_S^{(2)})/\beta_2 = p$

dove:

- $\theta_P^{(1)}$ è l'angolo di incidenza dell'onda P nel mezzo 1
- $\theta_S^{(1)}$ è l'angolo di riflessione dell'onda S nel mezzo 1
- $\theta_P^{(2)}$ è l'angolo di rifrazione dell'onda P nel mezzo 2
- $\theta_S^{(2)}$ è l'angolo di rifrazione dell'onda S nel mezzo 2
- p è il **parametro del raggio** (lentezza orizzontale), una costante del moto

Interpretazione: Il parametro p è conservato attraverso l'interfaccia. È analogo all'indice di rifrazione in ottica.

Angoli critici: Se $\alpha_1 < \alpha_2$ (mezzo più veloce sotto), esiste un angolo critico oltre il quale non si ha più onda P trasmessa:

$\theta_c = \arcsin(\alpha_1/\alpha_2)$

Per $\theta > \theta_c$, l'onda P subisce **riflessione totale** e l'energia viene totalmente riflessa o convertita in onda S.

3.3 Le Equazioni di Zoeppritz

Le **equazioni di Zoeppritz** determinano le ampiezze delle onde riflesse e trasmesse in funzione dell'angolo di incidenza e dei parametri elastici dei due mezzi.

Per un'onda P incidente con ampiezza unitaria, le equazioni sono (forma compatta con notazione matriciale):

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{B}$$

dove:

- $\mathbf{R} = (R_P, R_S, T_P, T_S)^T$ è il vettore dei coefficienti di riflessione/trasmissione
- **M** è una matrice 4×4 che dipende dagli angoli e dalle proprietà dei mezzi
- **B** è il vettore termine noto

Le espressioni esplicite sono piuttosto complesse. Ad esempio, per un'onda P incidente:

Riga 1 (continuità u_x): $\sin(\theta_1) - R_P \sin(\theta_1) + R_S \cos(\varphi_1) = T_P \sin(\theta_2) - T_S \cos(\varphi_2)$

Riga 2 (continuità u_z): $\cos(\theta_1) + R_P \cos(\theta_1) + R_S \sin(\varphi_1) = T_P \cos(\theta_2) + T_S \sin(\varphi_2)$

Riga 3 (continuità σ_xz): $-\rho_1\beta_1^2[\sin(2\theta_1) + R_P \sin(2\theta_1) + R_S \cos(2\varphi_1)] = -\rho_2\beta_2^2[T_P \sin(2\theta_2) + T_S \cos(2\varphi_2)]$

Riga 4 (continuità σ_zz): $\rho_1\alpha_1^2[\cos(2\varphi_1) + R_P \cos(2\varphi_1) - R_S \sin(2\varphi_1)] = \rho_2\alpha_2^2[T_P \cos(2\varphi_2) - T_S \sin(2\varphi_2)]$

dove θ denota angoli P e φ denota angoli S.

Queste equazioni non ammettono soluzioni in forma chiusa semplice, ma possono essere risolte numericamente per ogni angolo di incidenza.

3.4 Il Caso di Incidenza Normale

Per **incidenza normale** ($\theta = 0$), le equazioni si semplificano notevolmente perché non c'è conversione di modo (le onde P generano solo P, le S solo S).

Per un'onda P a incidenza normale, i coefficienti di riflessione e trasmissione dipendono solo dall'**impedenza acustica** $Z = \rho\alpha$ dei due mezzi:

Coefficiente di riflessione:

$$R_P = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$$

Coefficiente di trasmissione:

$$T_P = 2Z_1/(Z_2 + Z_1)$$

Proprietà:

- Se $Z_2 > Z_1$ (mezzo più denso sotto): $R_P > 0$ (riflessione in fase)
- Se $Z_2 < Z_1$ (mezzo meno denso sotto): $R_P < 0$ (riflessione con inversione di fase)
- Conservazione dell'energia: $|R_P|^2 + (Z_2/Z_1)|T_P|^2 = 1$

Esempio numerico: Interfaccia crosta-mantello (Moho):

- Crosta: $\rho_1 = 2800$ kg/m³, $\alpha_1 = 6.5$ km/s $\rightarrow Z_1 = 18.2 \times 10^6$ kg/(m²·s)
- Mantello: $\rho_2 = 3300$ kg/m³, $\alpha_2 = 8.1$ km/s $\rightarrow Z_2 = 26.7 \times 10^6$ kg/(m²·s)

$$R_P = (26.7 - 18.2)/(26.7 + 18.2) = 8.5/44.9 \approx 0.19$$

Circa il 19% dell'ampiezza viene riflessa.

3.5 Mezzi con Molti Strati: Riflessioni Multiple

Per mezzi con molti strati, ogni interfaccia genera riflessioni e trasmissioni multiple, e le varie onde si sovrappongono creando un campo d'onda estremamente complicato.

Il **metodo della matrice di propagazione** è particolarmente utile in questo contesto. Si rappresenta la relazione tra i campi d'onda sopra e sotto ogni strato mediante una matrice 2×2 (per il caso 1D):

$$[A^+]\ [m_{11}\ m_{12}]\ [A^+]\ [A^-]_top = [m_{21}\ m_{22}]\ [A^-]_bottom$$

dove A^+ e A^- sono le ampiezze delle onde verso il basso e verso l'alto.

La propagazione attraverso l'intera struttura stratificata è descritta dal **prodotto** di queste matrici:

$$\mathbf{M}_total = \mathbf{M}N \cdot \boldsymbol{M}(N-1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$$

Questa formulazione è molto efficiente computazionalmente e permette di calcolare rapidamente la risposta di strutture con centinaia di strati.

3.6 Le Onde Superficiali e la Dispersione

Un fenomeno importante che emerge in mezzi stratificati è la **dispersione delle onde superficiali**. Le onde superficiali si propagano lungo superfici libere o interfacce e hanno ampiezza che decade esponenzialmente con la profondità.

Onde di Rayleigh: Si propagano lungo la superficie libera di un semispazio elastico. Le particelle descrivono ellissi retrograde nel piano verticale contenente la direzione di propagazione. La velocità v_R soddisfa:

$(2 - v_R^2/\beta^2)^2 = 4\sqrt{(1 - v_R^2/\alpha^2)}\sqrt{(1 - v_R^2/\beta^2)}$

Tipicamente: $v_R \approx 0.92\beta$

Onde di Love: Si propagano in uno strato elastico sopra un semispazio con velocità delle onde S maggiore. Le particelle oscillano orizzontalmente, perpendicolari alla direzione di propagazione (polarizzazione SH). Esistono solo se $\beta_1 < \beta_2$ (strato più lento sopra semispazio più veloce).

Dispersione: A differenza delle onde di volume (P e S) che sono non dispersive in mezzi omogenei, le onde superficiali in mezzi stratificati sono **fortemente dispersive**: la velocità dipende dalla frequenza (o dalla lunghezza d'onda).

La **velocità di fase** $c(\omega)$ è la velocità a cui si muovono le creste dell'onda:

$c(\omega) = \omega/k(\omega)$

La **velocità di gruppo** $U(\omega)$ è la velocità a cui si muove l'energia (l'inviluppo del pacchetto d'onda):

$U(\omega) = d\omega/dk$

Origine fisica della dispersione: Onde con diverse lunghezze d'onda "sentono" diverse porzioni della struttura verticale:

- Onde a **periodo lungo** (lunghezze d'onda grandi) penetrano più profondamente e sono influenzate dalle proprietà degli strati profondi
- Onde a **periodo corto** (lunghezze d'onda piccole) rimangono confinate vicino alla superficie e sono sensibili solo agli strati superficiali

Poiché le proprietà elastiche tipicamente aumentano con la profondità, le onde a periodo lungo viaggiano più velocemente delle onde a periodo corto.

Applicazione: inversione delle curve di dispersione:

L'analisi della dispersione delle onde superficiali è uno strumento potente per determinare la struttura della velocità sismica in funzione della profondità. Il procedimento è:

1. **Osservazione**: Registrare le onde superficiali da terremoti o sorgenti artificiali
2. **Analisi**: Estrarre la velocità di fase (o di gruppo) come funzione del periodo

3. **Inversione**: Risolvere il problema inverso per determinare il profilo di velocità v(z)

Questo metodo è ampiamente utilizzato sia in sismica di esplorazione (per profondità di poche centinaia di metri) sia in sismologia globale (per investigare la struttura della crosta e del mantello superiore fino a 100-200 km di profondità).

SISMOLOGIA E STRUTTURA INTERNA DELLA TERRA

Capitolo 4: La Teoria dei Raggi Sismici

La teoria dei raggi fornisce un'approssimazione geometrica alla propagazione delle onde sismiche che è estremamente utile per comprendere il percorso delle onde attraverso la struttura interna della Terra. Questa teoria è valida quando la **lunghezza d'onda è molto piccola** rispetto alle scale di variazione delle proprietà del mezzo.

4.1 Il Principio di Fermat e l'Equazione del Raggio

Il principio fondamentale della teoria dei raggi è il **principio di Fermat**, che afferma che il percorso seguito da un raggio tra due punti è quello che rende **stazionario** (tipicamente minimo) il tempo di percorrenza.

Matematicamente, questo si esprime come:

$$\delta \int_A^B (ds/v) = 0$$

dove:

- L'integrale è calcolato lungo il percorso del raggio
- ds è l'elemento di lunghezza d'arco
- v è la velocità locale dell'onda
- δ denota la variazione del funzionale (calcolo delle variazioni)

Derivazione dell'equazione del raggio:

Definiamo la **lentezza** (reciproco della velocità):

$$s(\mathbf{x}) = 1/v(\mathbf{x})$$

Il tempo di percorrenza lungo un percorso $\mathbf{x}(\sigma)$ parametrizzato da $\sigma \in [0,1]$ è:

$$T[\mathbf{x}] = \int_0^1 s(\mathbf{x}(\sigma)) \, |d\mathbf{x}/d\sigma| \, d\sigma$$

Applicando il calcolo delle variazioni (equazione di Eulero-Lagrange per il funzionale T), si ottiene l'**equazione del raggio**:

$$d/ds[\mathbf{T}(\mathbf{x})/v(\mathbf{x})] = \nabla \mathbf{T}(\mathbf{x})$$

dove $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \nabla s$ è il vettore lentezza, $\hat{\mathbf{s}}$ è il versore tangente al raggio, e s è ora la coordinata di arco lungo il raggio.

Forma alternativa: In coordinate cartesiane, le equazioni parametriche del raggio sono:

$d^2x_i/ds^2 = v^2(\partial v^{-1}/\partial x_i)$

per i = 1, 2, 3. Queste sono tre equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine accoppiate.

Interpretazione fisica: Il raggio si curva verso regioni di **velocità minore**. Questo è analogo alla rifrazione della luce in mezzi con indice di rifrazione variabile.

4.2 Conservazione del Parametro del Raggio in Mezzi Stratificati

Per un mezzo **stratificato orizzontalmente**, dove la velocità dipende solo dalla profondità z: v = v(z), esiste una **quantità conservata** lungo il raggio, chiamata **parametro del raggio** p:

$p = \sin(i(\mathbf{z}))/v(\mathbf{z}) = \text{costante}$

dove $i(\mathbf{z})$ è l'angolo che il raggio forma con la verticale alla profondità z.

Dimostrazione: In un mezzo stratificato, l'equazione del raggio si semplifica. Consideriamo un sistema di coordinate (x,z) con z verticale verso il basso e x orizzontale. Il raggio giace in un piano verticale per simmetria. Dalle equazioni del raggio:

$d^2x/ds^2 = v^2\, d(v^{-1})/dx = 0$ (perché v non dipende da x)

Quindi dx/ds = costante. Ma dx/ds = sin(i), quindi:

$\sin(i)/v = p = \text{costante}$

Questa è una generalizzazione della legge di Snell per mezzi a variazione continua.

Significato del parametro p: È la componente orizzontale del vettore lentezza, ovvero la "lentezza orizzontale". Geometricamente, rappresenta la pendenza della traiettoria del raggio nel diagramma distanza-tempo.

Punti di svolta: Quando il raggio raggiunge una profondità dove v(z) = 1/p, l'angolo diventa i = 90° e il raggio diventa orizzontale. Questo è il **punto di svolta** (turning point). Oltre questa profondità, il raggio si piega verso l'alto per simmetria.

La profondità del punto di svolta z_tp soddisfa:

$v(z_tp) = 1/p$

4.3 Il Calcolo dei Tempi di Percorrenza e delle Distanze

Per un raggio che parte dalla superficie (z=0) con parametro p, scende fino al punto di svolta a profondità z_tp, e risale alla superficie, possiamo calcolare:

Distanza epicentrale Δ (distanza orizzontale percorsa):

$$\Delta(p) = 2\int_0^{z_{tp}} p/(\sqrt{(1/v^2 - p^2)})\, dz$$

Tempo di percorrenza τ:

$$\tau(p) = 2\int_0^{z_{tp}} 1/(v\sqrt{(1/v^2 - p^2)})\, dz$$

Questi integrali si ottengono da considerazioni geometriche:

- ds = dz/cos(i) è l'elemento di arco lungo il raggio
- dx = ds sin(i) = dz tan(i) = dz $p/(\sqrt{(1/v^2 - p^2)})$
- dt = ds/v = dz/(v cos(i)) = $dz/(v\sqrt{(1/v^2 - p^2)})$

Forma parametrica: Le equazioni Δ(p) e τ(p) forniscono una rappresentazione **parametrica** della curva tempo-distanza τ(Δ), con p come parametro.

4.4 Il Modello Sferico della Terra

Per una Terra sferica, dove la velocità dipende solo dal raggio r dal centro: v = v(r), il parametro del raggio diventa:

$$p = r \sin(i(r))/v(r) = \text{costante}$$

dove i(r) è l'angolo tra il raggio (direzione di propagazione) e la direzione radiale alla distanza r.

Distanza angolare Δ (angolo al centro della Terra):

$$\Delta(p) = 2\int_{r_{tp}}^{r_0} p/r\sqrt{[(r/v(r))^2 - p^2]}\, dr$$

Tempo di percorrenza:

$$\tau(p) = 2\int_{r_{tp}}^{r_0} 1/v(r)\sqrt{[(r/v(r))^2 - p^2]}\, dr$$

dove:

- r_0 è il raggio della superficie terrestre (≈ 6371 km)
- r_{tp} è il raggio del punto di svolta, determinato da: $r_{tp}p/v(r_{tp}) = 1$

Il fattore 2 tiene conto del percorso di andata e ritorno (simmetria).

Esempio: raggio che penetra nel mantello

Consideriamo un modello semplificato con velocità lineare:

$$v(r) = v_0(r/r_0)^n$$

Con n = 0 (omogeneo), i raggi sono rette. Con n > 0 (velocità crescente con la profondità), i raggi si curvano. Un valore tipico per il mantello superiore è n ≈ 0.2-0.3.

4.5 Le Zone d'Ombra Sismica

La teoria dei raggi permette di comprendere molte caratteristiche osservate nei sismogrammi. Un esempio fondamentale sono le **zone d'ombra sismica**, regioni sulla superficie terrestre dove certi tipi di onde non arrivano.

La zona d'ombra delle onde P: Si estende approssimativamente da 103° a 143° di distanza epicentrale ed è causata dalla **forte diminuzione di velocità** al confine mantello-nucleo esterno (circa 2891 km di profondità).

Spiegazione fisica: Al confine mantello-nucleo:

- Mantello inferiore: $v_P \approx 13.7$ km/s
- Nucleo esterno: $v_P \approx 8.1$ km/s (diminuzione di ~40%)

Questa forte diminuzione fa sì che i raggi sismici vengano **rifratti** bruscamente verso il basso quando entrano nel nucleo. Applicando la legge di Snell:

$$p = r_{CMB} \sin(i_{mantello})/v_{mantello} = r_{CMB} \sin(i_{nucleo})/v_{nucleo}$$

Poiché $v_{nucleo} < v_{mantello}$, si ha $i_{nucleo} < i_{mantello}$ (rifrazione verso la normale, cioè verso il basso).

I raggi che incidono al confine mantello-nucleo con angoli piccoli (vicini alla verticale) penetrano nel nucleo e riemergono oltre 143°. I raggi con angoli maggiori vengono riflessi o rifratti in modo da non raggiungere la superficie tra 103° e 143°, creando la zona d'ombra.

Altre fasi sismiche importanti:

- **PKP**: onde P che attraversano il nucleo (K sta per "Kern", nucleo in tedesco)
- **SKS**: onde S convertite in P al mantello-nucleo, attraversano il nucleo come P, poi riconvertite in S
- **PKIKP**: onde P che attraversano anche il nucleo interno
- **ScS**: onde S riflesse al confine mantello-nucleo

La nomenclatura segue convenzioni standard in sismologia.

Capitolo 5: Il Problema Inverso in Sismologia

Un problema fondamentale in sismologia è determinare la struttura della velocità sismica all'interno della Terra a partire dai tempi di percorrenza osservati delle onde sismiche. Questo è un esempio paradigmatico di **problema inverso**: dato l'effetto (i tempi di arrivo), vogliamo inferire la causa (la distribuzione di velocità).

5.1 Formulazione del Problema Diretto

Il **problema diretto** consiste nel calcolare i tempi di percorrenza per un dato modello di velocità. Utilizzando la teoria dei raggi sviluppata nel capitolo precedente, abbiamo visto che il tempo è dato dall'integrale:

$$\tau(p) = 2\int_{r_{tp}}^{r_0} \frac{1}{v(r)\sqrt{(r/v(r))^2 - p^2}}\, dr$$

dove la profondità del punto di svolta r_{tp} è determinata implicitamente dalla condizione:

$$r_{tp}\, p/v(r_{tp}) = 1$$

Dato v(r) e p, possiamo calcolare numericamente questo integrale usando metodi standard (ad esempio, quadratura di Gauss).

La distanza epicentrale corrispondente è:

$$\Delta(p) = 2\int_{r_{tp}}^{r_0} \frac{p}{r\sqrt{(r/v(r))^2 - p^2}}\, dr$$

Queste formule forniscono una curva parametrica (τ,Δ) con parametro p.

5.2 Il Problema Inverso: dalla Formula di Herglotz-Wiechert

Il **problema inverso** è molto più delicato. Dati i tempi di percorrenza $\tau(\Delta)$ come funzione della distanza epicentrale Δ, vogliamo determinare v(r).

Questo problema fu risolto per la prima volta da **Herglotz** (1907) e **Wiechert** (1910). La loro soluzione si basa sull'inversione di una trasformata integrale.

Derivazione della formula di Herglotz-Wiechert:

Partiamo dalla relazione parametrica:

$$\frac{d\tau}{dp} = 2\int_{r_{tp}}^{r_0} \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{v\sqrt{(r/v)^2 - p^2}}\right] dr$$

Calcolando la derivata sotto il segno di integrale:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{v\sqrt{(r/v)^2 - p^2}}\right] = \frac{p}{v((r/v)^2 - p^2)^{3/2}}$$

Quindi:

$$\frac{d\tau}{dp} = 2\int_{r_{tp}}^{r_0} \frac{p}{v(r)((r/v(r))^2 - p^2)^{3/2}}\, dr$$

Questa derivata può essere riscritta in termini di $d\Delta/dp$. Dopo manipolazioni algebriche (dettagliate in testi specializzati come Aki & Richards), si ottiene la **formula di Herglotz-Wiechert**:

$$v(r) = (r/p)\exp\left[\int_{p}^{p_{max}} \cosh^{-1}(\eta(r_0)/rp)\, (d\tau/dp)\, dp\right]$$

dove:

- p è il parametro del raggio che ha punto di svolta a r
- p_{max} è il parametro massimo (raggio che sfiora la superficie)

- η(r_0) = v(r_0) è la velocità alla superficie

Interpretazione: Questa formula mostra che, **in linea di principio**, la struttura della velocità può essere determinata **univocamente** dai tempi di percorrenza, almeno sotto certe ipotesi semplificatrici:

1. Simmetria sferica (v dipende solo da r)
2. Continuità di v(r)
3. Validità della teoria dei raggi

5.3 Complicazioni Pratiche

Nella pratica, ci sono molte complicazioni:

1. Dati discreti e rumorosi: I tempi di arrivo sono misurati solo per un numero finito di distanze epicentrali, e contengono errori di misura.

2. Discontinuità: La Terra presenta discontinuità (Moho, confine mantello-nucleo, ecc.) che violano l'ipotesi di continuità di v(r). Le discontinuità richiedono trattamenti speciali.

3. Zone a bassa velocità: Regioni dove dv/dr < 0 (velocità che diminuisce con la profondità) creano **triplicazioni** nella curva τ(Δ): tre raggi diversi possono arrivare alla stessa distanza con tempi diversi. Queste regioni richiedono analisi attente.

4. Deviazioni dalla simmetria sferica: La Terra reale ha eterogeneità laterali (variazioni di velocità in direzione orizzontale) che non possono essere catturate da un modello 1D.

5.4 Metodi di Inversione Modernerni

La moderna inversione sismica utilizza tecniche più sofisticate basate sulla **minimizzazione di funzionali**. L'idea generale è:

1. Definire una funzione obiettivo che misura la discrepanza tra i dati osservati e quelli predetti da un modello:

$S[v] = \Sigma_i w_i(\tau_i^{obs} - \tau_i^{calc}[v])^2$

dove:

- La somma è su tutte le osservazioni (coppie sorgente-stazione)
- w_i sono pesi appropriati (tipicamente inversamente proporzionali alla varianza dell'errore)
- $\tau_i^{calc}[v]$ è il tempo calcolato per il modello v usando la teoria dei raggi

2. Cercare il modello v che minimizza S, tipicamente utilizzando metodi iterativi.

Linearizzazione e metodo dei minimi quadrati:

Se il modello attuale v_0 è "vicino" al vero modello v, possiamo linearizzare:

$\tau_i^{calc}[v] \approx \tau_i^{calc}[v_0] + \Sigma\square A_i\square \delta v\square$

dove:

- $\delta v_j = v_j - v_{0j}$ sono le perturbazioni del modello (discretizzato)
- A_{ij} sono le derivate parziali (derivate di Fréchet):

$A_{ij} = \partial \tau_i / \partial v_j$

Queste derivate rappresentano la **sensibilità** del tempo di percorrenza i alla velocità nella cella j, e sono proporzionali al tempo che il raggio i passa nella cella j.

Il problema linearizzato diventa:

$\delta \mathbf{d} = \mathbf{A}\, \delta \mathbf{v}$

dove:

- $\delta \mathbf{d} = \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{calc}[v_0]$ è il vettore dei residui
- **A** è la **matrice di sensitività**
- $\delta \mathbf{v}$ è il vettore delle perturbazioni del modello

La soluzione ai minimi quadrati è:

$\delta \mathbf{v} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \delta \mathbf{d}$

Questo fornisce una **correzione** al modello v_0. Il processo viene ripetuto iterativamente:

$v_{k+1} = v_k + \delta \mathbf{v}_k$

fino a convergenza (quando S[v] smette di diminuire significativamente).

5.5 Problemi di Mal Postura e Regolarizzazione

Il problema inverso sismologico è generalmente **mal posto** nel senso di Hadamard:

1. Non unicità: Possono esistere modelli diversi che si adattano ugualmente bene ai dati. Questo è particolarmente vero quando i dati sono limitati o hanno errori.

2. Instabilità: Piccole variazioni nei dati (errori di misura) possono portare a grandi variazioni nel modello inferito, specialmente per componenti ad alta frequenza spaziale del modello.

Regolarizzazione di Tikhonov:

Per ottenere soluzioni stabili e significative, è necessario introdurre **regolarizzazione**, cioè informazione a priori sul modello. L'approccio più comune è aggiungere alla funzione obiettivo un termine di **penalizzazione**:

$S_{reg}[v] = S[v] + \lambda R[v]$

dove:

- R[v] è un funzionale di regolarizzazione (tipicamente una misura della "rugosità" del modello)
- λ > 0 è il **parametro di regolarizzazione** che controlla il compromesso tra aderenza ai dati e regolarità del modello

Scelte comuni per R[v]:

Regolarizzazione di ordine zero (norma L2): R[v] = ∫ (v(r) - v_{ref}(r))² dr

Penalizza modelli che si discostano molto da un modello di riferimento v_{ref}.

Regolarizzazione di primo ordine (gradiente): R[v] = ∫ (dv/dr)² dr

Penalizza variazioni rapide di velocità, favorendo modelli "lisci".

Regolarizzazione di secondo ordine (curvatura): R[v] = ∫ (d²v/dr²)² dr

Penalizza curvature elevate, favorendo modelli ancora più lisci.

Scelta di λ: La scelta del parametro λ è cruciale:

- λ troppo piccolo: la soluzione è instabile, dominata dal rumore
- λ troppo grande: la soluzione è eccessivamente liscia, perde dettagli reali

Metodi comuni per scegliere λ:

- **Curva a L**: Graficare ‖Av-d‖ vs ‖Rv‖ in scala log-log; scegliere λ al "gomito" della curva
- **Validazione incrociata** (cross-validation): Dividere i dati in training e validation set
- **Principio di discrepanza** di Morozov: Scegliere λ tale che il misfit sia compatibile con il livello di rumore atteso nei dati

---

PROPAGAZIONE SISMICA AVANZATA E FENOMENI DISPERSIVI

Capitolo 6: Onde Superficiali - Teoria Matematica Completa e Fenomeni Dispersivi

Le onde superficiali costituiscono una classe fondamentale di soluzioni delle equazioni dell'elastodinamica che si manifestano in presenza di superfici libere o interfacce tra mezzi con proprietà elastiche differenti. A differenza delle onde di volume (onde P e onde S) che si propagano attraverso l'intero volume tridimensionale del mezzo elastico, le onde superficiali presentano una caratteristica peculiare: la loro ampiezza decade esponenzialmente con la profondità, confinando la maggior parte dell'energia sismica entro una distanza dalla superficie dell'ordine di una lunghezza d'onda. Questa localizzazione energetica vicino alla

superficie conferisce alle onde superficiali un'importanza straordinaria sia dal punto di vista teorico che applicativo.

Dal punto di vista sismologico, le onde superficiali sono responsabili della maggior parte dei danni associati ai terremoti nelle zone epicentrali, poiché trasportano ampiezze molto maggiori rispetto alle onde di volume e persistono per durate temporali considerevolmente più lunghe. L'energia trasportata da queste onde decade più lentamente con la distanza (approssimativamente come r^(-1/2) per onde cilindriche, contro r^(-1) per onde sferiche di volume), permettendo loro di propagarsi a distanze enormi mantenendo ampiezze significative. In sismologia globale, è comune osservare onde superficiali che hanno circumnavigato l'intera Terra multiple volte dopo grandi terremoti.

6.1 Le Onde di Rayleigh: Derivazione Rigorosa e Analisi Matematica Completa

Le onde di Rayleigh furono predette teoricamente da Lord Rayleigh nel suo celebre articolo del 1885, dove dimostrò l'esistenza di onde che si propagano lungo la superficie libera di un semispazio elastico isotropo omogeneo. La scoperta di Rayleigh fu notevole perché queste onde non erano state previste dalla teoria acustica precedente e rappresentavano un fenomeno genuinamente elastico, derivante dall'accoppiamento tra compressioni e distorsioni di taglio.

Formulazione matematica del problema di Rayleigh: Consideriamo un semispazio elastico omogeneo e isotropo che occupa la regione $z \geq 0$, dove l'asse z è orientato verso il basso dalla superficie libera. Il mezzo è caratterizzato da densità costante ρ e parametri elastici di Lamé λ e μ, entrambi costanti. La superficie $z = 0$ è completamente libera da tensioni, condizione che si esprime matematicamente richiedendo l'annullamento di tutte le componenti del tensore degli sforzi che coinvolgono la normale alla superficie:

$\sigma_{zz} = 0$ per $z = 0$ $\sigma_{xz} = 0$ per $z = 0$
$\sigma_{yz} = 0$ per $z = 0$

Queste tre condizioni al contorno rappresentano l'assenza di forze applicate sulla superficie libera e costituiscono il vincolo essenziale che determina l'esistenza delle onde di Rayleigh.

Ricerca di soluzioni nella forma di onde progressive: Cerchiamo soluzioni che rappresentino onde progressive armoniche che si propagano nella direzione x positiva con dipendenza temporale armonica. Il campo di spostamento ha la forma generale:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(z) \exp[i(kx - \omega t)]$$

dove $\mathbf{U}(z)$ è il vettore ampiezza dipendente solo dalla profondità z, k è il numero d'onda orizzontale (positivo per onde che viaggiano nella direzione x positiva), e ω è la frequenza angolare (pulsazione). Per semplicità, senza perdita di generalità, assumiamo che il moto sia confinato nel piano xz, ponendo $U_y = 0$. Questa scelta è giustificata dalla simmetria del problema: poiché la superficie è isotropa e non ci sono direzioni privilegiate nel piano orizzontale, le onde di Rayleigh si propagano indipendentemente dalla direzione scelta nel piano.

Decomposizione di Helmholtz applicata: Utilizzando il teorema di decomposizione di Helmholtz, possiamo esprimere il campo di spostamento come somma di una parte irrotazionale (derivante da un potenziale scalare) e una parte solenoidale (derivante da un potenziale vettoriale):

$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}$

Con la scelta della gauge di Coulomb: $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$. Per il moto piano nel piano xz, è sufficiente introdurre:

$\varphi(x, z, t) = \Phi(z) \exp[i(kx - \omega t)]$ $\psi_y(x, z, t) = \Psi(z) \exp[i(kx - \omega t)]$

con $\psi_x = \psi_z = 0$. Le componenti dello spostamento diventano quindi:

$u_x = \partial\varphi/\partial x + \partial\psi_y/\partial z = ik\Phi(z) \exp[i(kx - \omega t)] + \Psi'(z) \exp[i(kx - \omega t)]$ $u_z = \partial\varphi/\partial z - \partial\psi_y/\partial x = \Phi'(z) \exp[i(kx - \omega t)] - ik\Psi(z) \exp[i(kx - \omega t)]$

dove il primo indica la derivata rispetto a z.

Equazioni d'onda disaccoppiate per i potenziali: Sostituendo la decomposizione di Helmholtz nelle equazioni dell'elastodinamica in assenza di forze di volume:

$\rho\, \partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u}$

e utilizzando le proprietà dei potenziali, otteniamo due equazioni d'onda disaccoppiate:

$\partial^2\varphi/\partial t^2 = \alpha^2\, \nabla^2\varphi$ $\partial^2\boldsymbol{\psi}/\partial t^2 = \beta^2\, \nabla^2\boldsymbol{\psi}$

dove $\alpha = \sqrt{[(\lambda + 2\mu)/\rho]}$ è la velocità delle onde P e $\beta = \sqrt{[\mu/\rho]}$ è la velocità delle onde S.

Sostituendo le forme armoniche proposte per φ e ψ_y, otteniamo le equazioni differenziali ordinarie per le ampiezze:

$d^2\Phi/dz^2 + (\omega^2/\alpha^2 - k^2)\Phi = 0$ $d^2\Psi/dz^2 + (\omega^2/\beta^2 - k^2)\Psi = 0$

Condizione di decadimento esponenziale: Per avere onde superficiali che confinano l'energia vicino alla superficie, richiediamo che le ampiezze $\Phi(z)$ e $\Psi(z)$ decadano esponenzialmente per $z \to +\infty$. Questo è possibile solo se i coefficienti delle equazioni differenziali sono negativi, cioè:

$\omega^2/\alpha^2 - k^2 < 0 \to \omega/k < \alpha \to c < \alpha$ $\omega^2/\beta^2 - k^2 < 0 \to \omega/k < \beta \to c < \beta$

dove $c = \omega/k$ è la velocità di fase dell'onda superficiale. Poiché $\alpha > \beta$ sempre, la seconda condizione è più restrittiva e implica che **le onde di Rayleigh viaggiano più lentamente delle onde S**. Questa è una proprietà fondamentale.

Definiamo i parametri di decadimento:

$s = \sqrt{[k^2 - \omega^2/\alpha^2]} = k\sqrt{[1 - c^2/\alpha^2]}$ $t = \sqrt{[k^2 - \omega^2/\beta^2]} = k\sqrt{[1 - c^2/\beta^2]}$

Le soluzioni che decadono esponenzialmente sono:

$\Phi(z) = A \exp(-sz)$ $\Psi(z) = B \exp(-tz)$

dove A e B sono costanti da determinare mediante le condizioni al contorno.

Calcolo delle componenti del tensore degli sforzi: Per imporre le condizioni di superficie libera, dobbiamo calcolare le componenti rilevanti del tensore degli sforzi. Utilizzando la legge di Hooke:

$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij}(\partial u_k/\partial x_k) + \mu(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$

Calcoliamo esplicitamente:

$\sigma_{zz} = \lambda(\partial u_x/\partial x + \partial u_z/\partial z) + 2\mu\, \partial u_z/\partial z$ $\sigma_{xz} = \mu(\partial u_x/\partial z + \partial u_z/\partial x)$

Dopo alcune manipolazioni algebriche, utilizzando le espressioni per u_x e u_z in termini di Φ e Ψ:

$\sigma_{zz} = [\lambda(ik)^2\Phi + \lambda\Phi'' + 2\mu\Phi'' - 2\mu(ik)^2\Psi] \exp[i(kx - \omega t)] = [-(\lambda + 2\mu)k^2\Phi + \lambda\Phi'' + 2\mu\Phi'' - 2\mu ik\Psi'] \exp[i(kx - \omega t)]$

$\sigma_{xz} = \mu[ik\Phi' + \Psi'' - (ik)^2\Psi] \exp[i(kx - \omega t)] = \mu[ik\Phi' + \Psi'' + k^2\Psi] \exp[i(kx - \omega t)]$

Sostituendo $\Phi = A \exp(-sz)$ e $\Psi = B \exp(-tz)$:

$\Phi' = -sA \exp(-sz)$, $\Phi'' = s^2A \exp(-sz)$ $\Psi' = -tB \exp(-tz)$, $\Psi'' = t^2B \exp(-tz)$

Le componenti degli sforzi alla superficie ($z = 0$) diventano:

$\sigma_{zz}|_{z=0} = [-(\lambda + 2\mu)k^2A + (\lambda + 2\mu)s^2A + 2\mu iktB] \exp[i(kx - \omega t)] = [(\lambda + 2\mu)(s^2 - k^2)A + 2\mu iktB] \exp[i(kx - \omega t)]$

$\sigma_{xz}|_{z=0} = \mu[-iksA + (t^2 + k^2)B] \exp[i(kx - \omega t)]$

Ricordando che $s^2 - k^2 = -\omega^2/\alpha^2$ e $t^2 - k^2 = -\omega^2/\beta^2$:

$\sigma_{zz}|_{z=0} = [-(\lambda + 2\mu)\omega^2/\alpha^2\, A + 2\mu iktB] \exp[i(kx - \omega t)] = [-\rho\omega^2 A + 2\mu iktB] \exp[i(kx - \omega t)]$

$\sigma_{xz}|_{z=0} = \mu[-iksA + 2t^2B] \exp[i(kx - \omega t)]$

(dove abbiamo usato $t^2 + k^2 = 2t^2 - (\omega^2/\beta^2) = 2t^2 - (\omega^2\mu/\rho) = 2t^2$ per semplificazioni).

Imposizione delle condizioni al contorno: Le condizioni $\sigma_{zz} = 0$ e $\sigma_{xz} = 0$ alla superficie forniscono il sistema lineare omogeneo:

$-\rho\omega^2 A + 2\mu iktB = 0$ $-\mu iksA + 2\mu t^2B = 0$

Dividendo la prima equazione per μik e la seconda per μ:

$-\rho\omega^2/(\mu ik)\, A + 2tB = 0$ $-iksA + 2t^2B = 0$

Questo sistema ha soluzioni non banali (A, B ≠ 0) solo se il determinante della matrice dei coefficienti si annulla:

| -ρω²/(μik) 2t | | -iks 2t² | = 0

Calcolando il determinante:

(-ρω²/(μik))(2t²) - (2t)(-iks) = 0 -2ρω²t²/(μik) + 2ikst = 0 -ρω²t²/(μik) + ikst = 0

Moltiplicando per μik/(ρω²):

-t² + (μk²s)/(ρω²) t = 0 t[-t + μk²s/(ρω²)] = 0

La soluzione t = 0 è banale (corrisponderebbe a ψ = 0). La soluzione non banale è:

-t + μk²s/(ρω²) = 0 t = μk²s/(ρω²)

Questa è ancora una forma preliminare. Riscriviamo meglio il determinante:

(-ρω²/(μik))(2t²) + (2t)(iks) = 0 -2ρω²t²/(μik) + 2ikst = 0

Moltiplichiamo per i/(2kt):

ρω²t/(μk²) - s = 0

Quindi: s = ρω²t/(μk²)

Ma questa relazione deve essere compatibile con le definizioni di s e t. Procedendo più sistematicamente, riscriviamo il determinante in forma standard moltiplicando righe opportunamente:

Dalla prima equazione: A = 2μiktB/(ρω²) Sostituendo nella seconda: -μiks[2μiktB/(ρω²)] + 2μt²B = 0 -2μ²ik²stB/(ρω²) + 2μt²B = 0 -μik²st/(ρω²) + t² = 0 t²ρω² = μik²st tρω² = μik²s (dividendo per t, assumendo t ≠ 0)

No, questo approccio si complica. Riprendiamo dal determinante correttamente calcolato.

Il sistema è: -ρω²A + 2μiktB = 0 ... (1) -μiksA + 2μt²B = 0 ... (2)

Il determinante è: Det = (-ρω²)(2μt²) - (2μikt)(-μiks) = -2ρμω²t² - 2μ²ik²st = -2μ(ρω²t² + μik²st)

Per soluzioni non banali: ρω²t² + μik²st = 0

Ma questa equazione contiene i, il che non ha senso per una condizione reale. Rivediamo il calcolo degli sforzi.

Correzione del calcolo: Effettivamente, dobbiamo essere più attenti. Ricalcoliamo σ_xz:

σ_xz = μ(∂u_x/∂z + ∂u_z/∂x)

u_x = ikΦ + Ψ' u_z = Φ' - ikΨ

$\partial u_x/\partial z = ik\Phi' + \Psi''$ $\partial u_z/\partial x = ik\Phi' - ik(ik\Psi) = ik\Phi' + k^2\Psi$

Quindi: $\sigma_{xz} = \mu(ik\Phi' + \Psi'' + ik\Phi' + k^2\Psi) = \mu(2ik\Phi' + \Psi'' + k^2\Psi)$

Con $\Phi = Ae^{xp(-sz)}$ e $\Psi = Bexp(-tz)$:

$\sigma_{xz}|_{z=0} = \mu[2ik(-sA) + t^2B + k^2B] = \mu[-2iksA + (t^2 + k^2)B]$

Ora il sistema diventa: $[(\lambda + 2\mu)(s^2 - k^2)A + 2\mu iktB] = 0$ $\mu[-2iksA + (t^2 + k^2)B] = 0$

Semplificando e usando $s^2 - k^2 = -\omega^2/\alpha^2 = -\rho\omega^2/(\lambda + 2\mu)$:

$-\rho\omega^2A + 2\mu iktB = 0$ ... (1) $-2iksA + (t^2 + k^2)B = 0$ ... (2)

Il determinante è: $Det = (-\rho\omega^2)(t^2 + k^2) - (2\mu ikt)(-2iks) = -\rho\omega^2(t^2 + k^2) - 4\mu k^2st$

Per soluzioni non banali: $-\rho\omega^2(t^2 + k^2) - 4\mu k^2st = 0$

Dividiamo per $-\rho\omega^2$: $(t^2 + k^2) + 4\mu k^2st/(\rho\omega^2) = 0$

Questa equazione mescola ancora quantità complesse e reali in modo confuso. Il problema è che stiamo considerando forme complesse ma le condizioni al contorno devono essere soddisfatte per quantità reali.

Approccio corretto con quantità reali: In realtà, conviene lavorare direttamente con forme reali. Poniamo:

$\varphi = A\ exp(-sz)\ cos(kx - \omega t + \varphi_0)$ $\psi_y = B\ exp(-tz)\ cos(kx - \omega t + \psi_0)$

Per semplicità, scegliamo le fasi in modo che $\varphi_0 = 0$. Allora le componenti dello spostamento reale sono:

$u_x = -kA\ exp(-sz)\ sin(kx - \omega t) - tB\ exp(-tz)\ sin(kx - \omega t + \psi_0)$ $u_z = -sA\ exp(-sz)\ cos(kx - \omega t) - kB\ exp(-tz)\ cos(kx - \omega t + \psi_0)$

Calcoliamo le deformazioni e gli sforzi. Questo diventa algebricamente pesante.

Soluzione standard - equazione secolare di Rayleigh: Nella letteratura, si procede in modo più elegante utilizzando la notazione complessa ma richiedendo che le parti reale e immaginaria delle condizioni al contorno si annullino separatamente. Il risultato finale è che il rapporto B/A deve essere reale e la velocità di fase c deve soddisfare l'**equazione secolare di Rayleigh**:

$(2 - c^2/\beta^2)^2 = 4\sqrt{[(1 - c^2/\alpha^2)(1 - c^2/\beta^2)]}$

Questa è un'equazione algebrica per c/β. Definendo $\xi = c/\beta$ e ricordando che $\alpha^2/\beta^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu = 2(1 - \nu)/(1 - 2\nu)$, dove ν è il rapporto di Poisson, l'equazione diventa:

$(2 - \xi^2)^2 = 4\sqrt{[(1 - \xi^2\alpha^2/\beta^2)(1 - \xi^2)]}$ $(2 - \xi^2)^2 = 4\sqrt{[(1 - \xi^2(\lambda + 2\mu)/\mu)(1 - \xi^2)]}$

Elevando al quadrato: $(2 - \xi^2)^4 = 16(1 - \xi^2\alpha^2/\beta^2)(1 - \xi^2)$

Questa è un'equazione cubica in ξ^2 (o di sesto grado in ξ). Per un semispazio elastico omogeneo, questa equazione ammette **sempre una e una sola soluzione reale positiva** nell'intervallo $0 < c < \beta$, tipicamente:

$c_R \approx 0{,}87\beta$ a $0{,}95\beta$

Il valore preciso dipende dal rapporto di Poisson ν:

- Per $\nu = 0{,}25$ (tipico per rocce): $c_R \approx 0{,}9194\beta$
- Per $\nu = 0{,}33$: $c_R \approx 0{,}9344\beta$
- Nel limite $\nu \to 0{,}5$ (incomprimibile): $c_R \to \beta/\sqrt{3} \approx 0{,}5774\beta$

Movimento delle particelle: Le particelle in un'onda di Rayleigh descrivono ellissi retrograde (in senso orario se l'onda viaggia verso destra) nel piano verticale contenente la direzione di propagazione. L'ellisse degenera in movimento verticale puro alla superficie per certe combinazioni di parametri elastici. Con l'aumentare della profondità, l'ellisse cambia orientazione e può anche invertire il senso di rotazione a profondità dell'ordine di $0{,}2\lambda$.

Penetrazione in profondità: L'ampiezza decade esponenzialmente con costanti di decadimento:

$s = k\sqrt{[1 - (c_R/\alpha)^2]}$ $t = k\sqrt{[1 - (c_R/\beta)^2]}$

Tipicamente, per $z \approx \lambda$ (dove $\lambda = 2\pi/k$ è la lunghezza d'onda), l'ampiezza è ridotta a circa $\exp(-2\pi) \approx 0{,}002$ del valore superficiale, quindi praticamente trascurabile. Questo conferma che le onde di Rayleigh sono effettivamente confinate entro circa una lunghezza d'onda dalla superficie.

6.2 Le Onde di Love: Teoria Completa e Condizioni di Esistenza

Le onde di Love, scoperte da A.E.H. Love nel 1911, sono onde superficiali con polarizzazione puramente trasversale orizzontale (SH) che si propagano in presenza di una stratificazione orizzontale. A differenza delle onde di Rayleigh che esistono anche in un semispazio omogeneo, **le onde di Love richiedono necessariamente la presenza di almeno due strati con velocità delle onde S diverse**.

Configurazione del problema: Consideriamo il modello più semplice che permette l'esistenza delle onde di Love: uno strato elastico di spessore H sovrapposto a un semispazio elastico, entrambi omogenei e isotropi. Denotiamo con:

- **Strato superiore** ($0 \le z \le H$): densità ρ_1, velocità onde S β_1, modulo di taglio μ_1
- **Semispazio inferiore** ($z \ge H$): densità ρ_2, velocità onde S β_2, modulo di taglio μ_2

La superficie $z = 0$ è libera da tensioni. L'interfaccia $z = H$ deve soddisfare continuità di spostamento e trazione.

Condizione necessaria per l'esistenza: Le onde di Love possono esistere **se e solo se $\beta_1 < \beta_2$**, cioè se lo strato superiore è più "lento" del semispazio sottostante. Questa condizione è intuitivamente comprensibile: le onde devono essere intrappolate nello strato più lento per riflessione totale all'interfaccia con il mezzo più veloce sottostante.

Ansatz per il campo di spostamento: Per onde di Love, il movimento delle particelle è puramente orizzontale nella direzione y (perpendicolare alla direzione di propagazione x), senza componenti verticali o longitudinali:

$u_x = 0$ $u_y = U(z) \exp[i(kx - \omega t)]$ $u_z = 0$

L'equazione d'onda per la componente u_y si disaccoppia dalle altre e diventa:

$\partial^2 u_y/\partial t^2 = \beta^2(\partial^2 u_y/\partial x^2 + \partial^2 u_y/\partial z^2)$

dove β è la velocità locale delle onde S (β_1 nello strato, β_2 nel semispazio).

Sostituendo la forma armonica:

$-\omega^2 U(z) = \beta^2[(-k^2)U(z) + d^2U/dz^2]$ $d^2U/dz^2 = (\omega^2/\beta^2 - k^2)U = (\omega^2 - \beta^2 k^2)/\beta^2 U$

Definiamo la velocità di fase $c = \omega/k$. Allora:

$d^2U/dz^2 = k^2[(\omega/k)^2 - \beta^2]/\beta^2 U = k^2[c^2 - \beta^2]/\beta^2 U$

Nello strato superiore ($\beta = \beta_1$):

$d^2U_1/dz^2 = k^2[(c^2 - \beta_1^2)/\beta_1^2]U_1$

Definiamo: $\gamma_1^2 = k^2[c^2 - \beta_1^2]/\beta_1^2 = k^2[(c^2/\beta_1^2) - 1]$

Se $c > \beta_1$, allora $\gamma_1^2 > 0$ e γ_1 è reale. La soluzione generale è:

$U_1(z) = A \cos(\gamma_1 z) + B \sin(\gamma_1 z)$

Questo rappresenta un'onda stazionaria verticale (onda che si riflette avanti e indietro tra la superficie libera e l'interfaccia).

Nel semispazio inferiore ($\beta = \beta_2$):

$d^2U_2/dz^2 = k^2[(c^2 - \beta_2^2)/\beta_2^2]U_2$

Definiamo: $\gamma_2^2 = k^2[c^2 - \beta_2^2]/\beta_2^2$

Per avere un'onda superficiale, richiediamo che $U_2 \to 0$ per $z \to \infty$, il che è possibile solo se $c < \beta_2$ (allora $\gamma_2^2 < 0$). Poniamo:

$s_2^2 = -\gamma_2^2 = k^2[\beta_2^2 - c^2]/\beta_2^2 = k^2[1 - (c/\beta_2)^2]$

con s_2 reale positivo. La soluzione che decade esponenzialmente è:

$U_2(z) = C \exp[-s_2(z - H)]$

dove abbiamo scelto la fase in modo che l'ampiezza sia C all'interfaccia $z = H$.

Riepilogo delle condizioni sulla velocità di fase: Combinando le richieste:

$\beta_1 < c < \beta_2$

Questo è possibile solo se $\beta_1 < \beta_2$, confermando la condizione di esistenza. La velocità delle onde di Love è sempre compresa tra la velocità delle onde S nello strato e quella nel semispazio.

Condizioni al contorno:

1. **Superficie libera** (z = 0): Lo sforzo di taglio σ_yz deve annullarsi.

$\sigma_yz = \mu_1 \partial u_y/\partial z = \mu_1 dU_1/dz \exp[i(kx - \omega t)]$

Alla superficie: $dU_1/dz|_\{z=0\} = -A\gamma_1 \sin(0) + B\gamma_1 \cos(0) = B\gamma_1 = 0$

Quindi: **B = 0**

La soluzione nello strato diventa: $U_1(z) = A \cos(\gamma_1 z)$

2. **Interfaccia** (z = H): Continuità dello spostamento e della trazione.

Continuità di u_y: $U_1(H) = U_2(H) \rightarrow A \cos(\gamma_1 H) = C$

Continuità di σ_yz: $\mu_1 dU_1/dz|\{z=H\} = \mu_2 dU_2/dz|\{z=H\}$ $\mu_1[-A\gamma_1 \sin(\gamma_1 H)] = \mu_2[C(-s_2)]$ $\mu_1 A\gamma_1 \sin(\gamma_1 H) = \mu_2 Cs_2$

Dalla prima condizione: $C = A \cos(\gamma_1 H)$. Sostituendo nella seconda:

$\mu_1 \gamma_1 \sin(\gamma_1 H) = \mu_2 s_2 \cos(\gamma_1 H)$

Dividendo: $\tan(\gamma_1 H) = (\mu_2 s_2)/(\mu_1 \gamma_1)$

Questa è l'**equazione di dispersione per le onde di Love**.

Forma esplicita dell'equazione di dispersione: Esprimiamo tutto in termini della velocità di fase c. Ricordando:

$\gamma_1 = k\sqrt{[(c^2/\beta_1^2) - 1]}$ $s_2 = k\sqrt{[1 - (c^2/\beta_2^2)]}$

L'equazione diventa:

$\tan[kH\sqrt{[(c^2/\beta_1^2) - 1]}] = (\mu_2/\mu_1) \sqrt{[(1 - c^2/\beta_2^2)/(c^2/\beta_1^2 - 1)]}$

Questa è un'equazione trascendente per c (data ω, o equivalentemente dato k). Per ogni frequenza, esistono in generale **infinite soluzioni discrete**, corrispondenti ai **modi di Love** di ordine superiore.

Modi fondamentale e superiori:

- **Modo fondamentale** (n = 0): Esiste sempre per qualsiasi frequenza nel limite $\beta_1 < c < \beta_2$. È il modo con la velocità di fase più alta (più vicina a β_2) per ogni frequenza.

- **Modi superiori** (n = 1, 2, 3, ...): Esistono solo al di sopra di frequenze di taglio (cutoff frequencies) specifiche per ciascun modo. Al di sotto della frequenza di taglio, il modo n-esimo non può propagarsi.

La condizione per l'esistenza del modo n-esimo è che l'argomento della tangente sia tale da permettere almeno n passaggi per zero nell'intervallo [0, H]:

$kH\sqrt{[(c^2/\beta_1^2) - 1]} > n\pi$

Curve di dispersione: Per ogni modo, la relazione c(ω) o c(k) definisce una curva di dispersione. Caratteristiche importanti:

1. **Dispersione normale:** $dc/d\omega > 0$ (velocità di fase aumenta con la frequenza). Tipica a basse frequenze.

2. **Dispersione anomala:** $dc/d\omega < 0$ possibile in certe bande di frequenza per modi superiori.

3. **Limite a bassa frequenza ($\omega \to 0$, $\lambda \to \infty$):** Le onde "vedono" solo lo strato superficiale: $c \to \beta_1$ (per il modo fondamentale)

4. **Limite ad alta frequenza ($\omega \to \infty$, $\lambda \to 0$):** Le onde sono confinate vicino alla superficie: $c \to \beta_1$ (indipendentemente dal semispazio)

Velocità di gruppo: La velocità di gruppo U è la velocità con cui si propaga l'energia:

$U = d\omega/dk$

Per onde disperse, $U \neq c$ in generale. La relazione tra velocità di gruppo e velocità di fase può essere derivata dall'equazione di dispersione:

$U = c - \lambda\, dc/d\lambda = c + k\, dc/dk$

6.3 Dispersione delle Onde Superficiali: Origine Fisica e Implicazioni Sismologiche

La dispersione è il fenomeno per cui onde con frequenze diverse viaggiano a velocità diverse. Nelle onde superficiali che si propagano in mezzi stratificati, la dispersione è fortemente marcata e fornisce informazioni preziose sulla struttura della velocità in funzione della profondità.

Origine fisica della dispersione in mezzi stratificati: L'origine della dispersione nelle onde superficiali può essere compresa qualitativamente considerando la profondità di penetrazione delle onde. La distanza caratteristica entro cui l'ampiezza di un'onda superficiale è significativa scala approssimativamente con la lunghezza d'onda λ. Quindi:

- **Onde a periodo lungo** (lunghezze d'onda grandi, λ ~ 50-200 km): Penetrano profondamente nel mantello superiore, "campionando" le proprietà elastiche fino a profondità di 100-200 km. La loro velocità è influenzata dalla velocità media su

questo grande volume.

- **Onde a periodo intermedio** (λ ~ 10-50 km): Penetrano principalmente nella crosta inferiore e nel mantello più superficiale.

- **Onde a periodo corto** (λ ~ 1-10 km): Rimangono confinate nella crosta, "vedendo" solo gli strati più superficiali.

Poiché tipicamente la velocità sismica aumenta con la profondità (almeno in prima approssimazione), le onde a periodo lungo viaggiano più velocemente delle onde a periodo corto. Questo produce **dispersione normale**: c aumenta con T (o con λ).

Descrizione matematica della dispersione: Per onde in mezzi stratificati, la relazione tra frequenza ω e numero d'onda k non è più lineare come per onde in mezzi omogenei (dove ω = vk), ma è descritta da un'equazione implicita (equazione di dispersione):

$F(\omega, k, v_1(z), v_2(z), ..., \rho(z), ...) = 0$

dove v_1, v_2, ρ sono i profili di velocità e densità in funzione della profondità.

La velocità di fase è: $c(\omega) = \omega/k(\omega)$

La velocità di gruppo è: $U(\omega) = d\omega/dk$

Derivando implicitamente l'equazione di dispersione, si può dimostrare che:

$U = c^2/c - \omega(\partial c/\partial \omega) = c[1 - (\omega/c)(dc/d\omega)]$

Relazione tra velocità di fase e di gruppo: Se la dispersione è normale ($dc/d\omega > 0$), allora $U < c$: l'energia viaggia più lentamente delle creste delle onde individuali. Questo porta a un fenomeno osservabile: le creste sembrano "nascere" nella parte posteriore di un pacchetto d'onda, attraversarlo, e "morire" nella parte anteriore.

Dispersione in modelli realistici della Terra: Per la Terra reale, la dispersione delle onde superficiali è complessa e riflette la struttura dettagliata della crosta e del mantello superiore. Alcune caratteristiche osservate:

1. **Onde di Rayleigh continentali:**
    - A periodi T ≈ 20-40 s: velocità di fase c ≈ 3,6-3,9 km/s (influenzate dalla crosta spessa, 30-50 km)
    - A periodi T ≈ 100-200 s: velocità c ≈ 4,2-4,5 km/s (influenzate dal mantello superiore)
2. **Onde di Rayleigh oceaniche:**
    - A periodi corti (T ≈ 10-20 s): velocità più basse (crosta oceanica sottile, ≈ 6-7 km)
    - Dispersione più rapida che nei continenti

3. **Onde di Love:**
    - Generalmente più veloci delle onde di Rayleigh alla stessa frequenza
    - Dispersione fortemente influenzata dalla struttura della crosta

Inversione delle curve di dispersione: L'inversione della dispersione per ottenere la struttura della velocità in profondità è un problema inverso classico in sismologia. Il procedimento generale è:

1. **Misura:** Registrare onde superficiali da terremoti o sorgenti artificiali a diverse stazioni.

2. **Analisi spettrale:** Utilizzare tecniche come la trasformata di Fourier o l'analisi tempo-frequenza (wavelet, filtri multipli) per estrarre la velocità di fase c(ω) o la velocità di gruppo U(ω) come funzione della frequenza (o del periodo).

3. **Problema diretto:** Dato un modello v_S(z) della velocità delle onde S in funzione della profondità, calcolare numericamente la curva di dispersione teorica c_{calc}(ω; v_S(z)) risolvendo l'equazione di dispersione.

4. **Problema inverso:** Trovare il modello v_S(z) che minimizza la differenza tra le curve osservate e calcolate:

   S[v_S] = Σ_i w_i[c_i^{obs} - c_i^{calc}(v_S)]²

   dove la somma è su diverse frequenze i, e w_i sono pesi appropriati.

5. **Regolarizzazione:** Poiché il problema inverso è mal posto (instabile rispetto a perturbazioni ad alta frequenza spaziale), si introduce regolarizzazione, tipicamente penalizzando modelli troppo "rugosi":

   S_{reg}[v_S] = S[v_S] + λ∫[dv_S/dz]² dz

   Il parametro λ controlla il compromesso tra aderenza ai dati e regolarità.

6. **Risoluzione:** La risoluzione in profondità dipende dalla banda di periodi disponibili. Approssimativamente, le onde con periodo T forniscono informazione su profondità z ~ cT/(2π) ~ 0,15·T·v_S. Ad esempio:
    - T = 10 s, v_S ≈ 3,5 km/s: profondità ~ 5-8 km (crosta superiore)
    - T = 50 s: profondità ~ 30-40 km (crosta inferiore/Moho)
    - T = 200 s: profondità ~ 100-150 km (mantello superiore)

Applicazioni pratiche:

La dispersione delle onde superficiali è utilizzata estensivamente in:

- **Sismica di esplorazione:** Per caratterizzare i primi 10-100 metri del sottosuolo in geotecnica e ingegneria.

- **Struttura crostale regionale:** Per determinare lo spessore della crosta e la velocità media della crosta e del mantello superiore.

- **Tomografia globale:** Combinando misure di dispersione da migliaia di terremoti registrati a stazioni globali, si costruiscono mappe 3D della velocità delle onde S nel mantello superiore, rivelando zone calde (plume), zone fredde (slabs di subduzione), e variazioni laterali di temperatura e composizione.

GEODINAMICA PROFONDA E CONVEZIONE MANTELLICA

Capitolo 7: Convezione nel Mantello Terrestre - Teoria e Modellazione

La convezione termica nel mantello terrestre è il motore principale della dinamica del nostro pianeta. Essa è responsabile del movimento delle placche tettoniche, della generazione di vulcani e terremoti, della formazione di catene montuose, e dell'evoluzione termica della Terra su scale temporali geologiche (milioni e miliardi di anni). La comprensione quantitativa della convezione mantellica richiede la combinazione di meccanica dei fluidi, termodinamica, reologia dei materiali ad alta pressione e temperatura, e fisica matematica.

7.1 Fondamenti Fisici della Convezione Termica

La convezione termica si manifesta quando un fluido è riscaldato dal basso (o raffreddato dall'alto), creando gradienti di densità che, in presenza di gravità, possono generare moti convettivi. Il mantello terrestre, pur comportandosi come un solido su scale temporali brevi (onde sismiche), fluisce come un fluido molto viscoso su scale temporali geologiche (milioni di anni).

Equazioni governanti: Il sistema di equazioni che descrive la convezione termica in un fluido viscoso è costituito da:

1. **Conservazione della massa** (equazione di continuità): $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$

   Per fluidi debolmente comprimibili o con l'approssimazione di Boussinesq (che introduce): $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$

2. **Conservazione della quantità di moto** (equazione di Navier-Stokes): $\rho\, D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g}$

   dove $\boldsymbol{\tau}$ è il tensore deviatorico degli sforzi viscosi, $\mathbf{g}$ è l'accelerazione gravitazionale.

3. **Conservazione dell'energia** (equazione del calore): $\rho c_p DT/Dt = \nabla\cdot(k\nabla T) + \Phi + H$

   dove:

   - c_p è il calore specifico a pressione costante
   - k è la conducibilità termica
   - Φ è il riscaldamento per dissipazione viscosa
   - H rappresenta sorgenti interne di calore (decadimento radioattivo)
4. **Equazione di stato:** $\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0) + \beta(p - p_0)]$

   dove α è il coefficiente di espansione termica e β è la comprimibilità.

Approssimazione di Boussinesq: Per semplificare il problema mantenendo la fisica essenziale, si utilizza spesso l'approssimazione di Boussinesq, valida quando le variazioni di densità sono piccole ($\Delta\rho/\rho << 1$) ma sufficienti a guidare la convezione. In questa approssimazione:

- La densità è trattata come costante ($\rho = \rho_0$) ovunque tranne nel termine di galleggiamento gravitazionale.
- L'incomprimibilità è assunta: $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$
- Le variazioni di densità sono approssimate linearmente: $\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$

Le equazioni si semplificano in:

$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ $\rho_0 \partial\mathbf{v}/\partial t + \rho_0(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} + \rho_0\alpha(T - T_0)\mathbf{g}$ $\partial T/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \kappa\nabla^2 T + H/(\rho_0 c_p)$

dove η è la viscosità dinamica e $\kappa = k/(\rho_0 c_p)$ è la diffusività termica.

7.2 Instabilità di Rayleigh-Bénard: Analisi di Stabilità Lineare

Il problema di Rayleigh-Bénard è il paradigma classico della convezione termica: un fluido confinato tra due piastre orizzontali parallele, con la piastra inferiore mantenuta a temperatura T_H e quella superiore a temperatura $T_C < T_H$. Quando la differenza di temperatura $\Delta T = T_H - T_C$ supera una soglia critica, lo stato di conduzione puramente diffusivo diventa instabile e si sviluppano celle convettive.

Configurazione e stato base: Consideriamo uno strato fluido di spessore d tra $z = 0$ (piastra calda) e $z = d$ (piastra fredda). Lo stato base (senza convezione) è caratterizzato da:

- Velocità nulla: $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$
- Temperatura lineare: $T_0(z) = T_H - (\Delta T/d)z$
- Pressione idrostatica: $dp_0/dz = -\rho_0 g[1 - \alpha(T_0 - T_{ref})]$

Perturbazioni infinitesime: Introduciamo piccole perturbazioni:

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' = \mathbf{v}'$ (poiché $\mathbf{v}_0 = 0$) $T = T_0(z) + T'$ $p = p_0(z) + p'$

Sostituendo nelle equazioni di Boussinesq e linearizzando (trascurando termini quadratici in **v'**, T', p'), otteniamo le equazioni per le perturbazioni:

$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$ $\rho_0 \partial \mathbf{v}'/\partial t = -\nabla p' + \eta \nabla^2 \mathbf{v}' + \rho_0 \alpha g T' \mathbf{e}_z$ $\partial T'/\partial t + v'_z \, dT_0/dz = \kappa \nabla^2 T'$

dove $\mathbf{e}_z$ è il versore verticale. Sostituendo $dT_0/dz = -\Delta T/d$:

$\partial T'/\partial t - v'_z(\Delta T/d) = \kappa \nabla^2 T'$

Soluzioni normali: Cerchiamo soluzioni nella forma di modi normali (separazione delle variabili):

$\mathbf{v}'(x, y, z, t) = \mathbf{V}(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t]$ $T'(x, y, z, t) = \Theta(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t]$ $p'(x, y, z, t) = \Pi(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t]$

dove k_x, k_y sono numeri d'onda orizzontali, e σ è il tasso di crescita ($\sigma > 0$: instabilità; $\sigma < 0$: stabilità; $\sigma = 0$: marginalmente stabile).

Definendo $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ (numero d'onda orizzontale totale), le equazioni diventano un sistema di equazioni differenziali ordinarie per $V_z(z)$, $\Theta(z)$, $\Pi(z)$.

Eliminazione della pressione e della velocità orizzontale: Prendendo la divergenza dell'equazione del moto e usando $\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$, si elimina la pressione. Prendendo la componente z della vorticità dell'equazione del moto, si eliminano le componenti orizzontali della velocità. Dopo manipolazioni algebriche, si ottiene un sistema disaccoppiato di due equazioni per V_z e Θ:

$(D^2 - k^2)^2 V_z = (\rho_0 \alpha g/(\eta\sigma + \eta k^2)) \, k^2 \Theta$ $(D^2 - k^2 - \sigma/\kappa)\Theta = (\Delta T/d) V_z$

dove $D = d/dz$. Queste devono essere soddisfatte insieme alle condizioni al contorno.

Condizioni al contorno: Per piastre rigide impermeabili con temperatura fissata:

$z = 0, d$: $V_z = 0$, $DV_z = 0$, $\Theta = 0$

Forma adimensionale e numero di Rayleigh: Introduciamo variabili adimensionali:

$z^* = z/d$, $V_z^* = V_z \, d^2/(\kappa)$, $\Theta^* = \Theta d/(\kappa \Delta T)$, $k^* = kd$, $\sigma^* = \sigma d^2/\kappa$

Le equazioni diventano (omettendo gli asterischi):

$(D^2 - k^2)^2 V_z = Ra \cdot k^2 \Theta/(1 + \sigma/Pr)$ $(D^2 - k^2 - \sigma)\Theta = V_z$

dove:

- **$Ra = \rho_0 \alpha g \Delta T \, d^3/(\eta\kappa)$** è il **numero di Rayleigh**, il parametro di controllo che misura il rapporto tra forze di galleggiamento e forze dissipative (viscose e termiche).
- **$Pr = \eta/(\rho_0 \kappa) = \nu/\kappa$** è il **numero di Prandtl**, che misura il rapporto tra diffusività di momento (cinematica $\nu = \eta/\rho_0$) e diffusività termica.

Soglia di instabilità - Analisi marginale: Alla soglia di instabilità, $\sigma = 0$ (stato marginalmente stabile). Le equazioni si riducono a:

$(D^2 - k^2)^2 V_z = (Ra/Pr)\, k^2 \Theta$ $(D^2 - k^2)\Theta = V_z$

Eliminando Θ: $(D^2 - k^2)^3 V_z = (Ra/Pr)\, k^2 V_z$

Con le condizioni al contorno $V_z = DV_z = 0$ a $z = 0, 1$, si può mostrare che le autofunzioni sono:

$V_z(z) = \sin(n\pi z)$, $n = 1, 2, 3, ...$

Sostituendo $V_z = \sin(n\pi z)$ nell'equazione degli autovalori:

$[(n\pi)^2 + k^2]^3 \sin(n\pi z) = (Ra/Pr)\, k^2 \sin(n\pi z)$

Quindi: $Ra_c(k, n) = (Pr/k^2)[(n\pi)^2 + k^2]^3$

Il **Rayleigh critico** Ra_{crit} è il minimo di Ra_c rispetto a k e n. Per $n = 1$ (modo fondamentale), minimizziamo rispetto a k:

$d\, Ra_c/dk = 0 \rightarrow -2Pr[(\pi)^2 + k^2]^3/k^3 + 3Pr[(\pi)^2 + k^2]^2 \cdot 2k/k^2 = 0 \rightarrow -2[(\pi)^2 + k^2]^3/k^3 + 6[(\pi)^2 + k^2]^2 = 0 \rightarrow -2[(\pi)^2 + k^2] + 6k^2 = 0 \rightarrow 4k^2 = 2\pi^2 \rightarrow k^2 = \pi^2/2$

Sostituendo: $Ra_{crit} = (Pr/(\pi^2/2))[(\pi^2 + \pi^2/2)]^3 = (2Pr/\pi^2)(3\pi^2/2)^3 = (2Pr/\pi^2)(27\pi^6/8) = (27\pi^4/4)\, Pr$

Per Pr molto grande (tipico del mantello, $Pr \sim 10^{23}$), il valore critico è:

$Ra_{crit} \approx (27\pi^4/4)\, Pr \approx 657{,}5\, Pr$

Ma per $Pr \rightarrow \infty$, una derivazione più attenta (tenendo conto che σ/Pr nel denominatore può essere trascurato) dà il risultato classico:

$Ra_{crit} = 1707{,}76$ (per piastre rigide con temperatura fissata)

Questo significa che la convezione inizia quando:

$\rho_0 \alpha g \Delta T\, d^3/(\eta\kappa) > 1708$

Il numero d'onda critico è $k_{crit} = \pi/\sqrt{2}$, corrispondente a una lunghezza d'onda orizzontale:

$\lambda_{crit} = 2\pi/k_{crit} = 2\sqrt{2}\, d \approx 2{,}828\, d$

Le celle convettive hanno dimensione orizzontale circa 2,8 volte lo spessore dello strato.

Pattern di convezione: Appena sopra la soglia critica, si formano celle convettive regolari. In geometrie senza vincoli laterali, i pattern possono essere:

- **Rotoli (rolls):** Celle bidimensionali allungate in una direzione (come cilindri paralleli)
- **Celle esagonali:** Pattern tridimensionale con simmetria esagonale

- **Celle quadrate:** Meno comuni, richiedono condizioni specifiche

Quale pattern si realizza dipende dalla geometria del contenitore, dalle condizioni al contorno, e da nonlinearità deboli appena sopra la soglia.

7.3 Convezione nel Mantello: Parametri Fisici e Regime di Flusso

Applichiamo ora questi concetti al mantello terrestre. I valori tipici dei parametri sono:

- Spessore del mantello: $d \approx 2900$ km $= 2{,}9 \times 10^6$ m
- Differenza di temperatura: $\Delta T \approx 2500$-3000 K
- Viscosità (ordine di grandezza): $\eta \approx 10^{21}$ Pa·s
- Densità: $\rho_0 \approx 4500$ kg/m³
- Coefficiente di espansione termica: $\alpha \approx 2 \times 10^{-5}$ K^{-1}
- Diffusività termica: $\kappa \approx 10^{-6}$ m²/s
- Accelerazione gravitazionale: $g \approx 10$ m/s²

Il numero di Rayleigh per il mantello è:

$Ra = (4500 \times 2 \times 10^{-5} \times 10 \times 2500 \times (2{,}9 \times 10^6)^3) / (10^{21} \times 10^{-6}) \approx (4500 \times 2 \times 10^{-5} \times 10 \times 2500 \times 2{,}4 \times 10^{19}) / (10^{15}) \approx (2{,}7 \times 10^{28}) / (10^{15}) \approx 2{,}7 \times 10^{13}$ / (qualche fattore dimenticato)

Più accuratamente: $Ra \approx 10^6$ - 10^8

Questo è **enormemente supercritico** rispetto a $Ra_{crit} \approx 1708$. La convezione mantellica è quindi estremamente vigorosa dal punto di vista termodinamico.

Il numero di Prandtl è: $Pr = \eta/(\rho_0 \kappa) = 10^{21}/(4500 \times 10^{-6}) \approx 2 \times 10^{23}$

Questo valore elevatissimo indica che la diffusione termica è molto più efficiente della diffusione di momento: il mantello dissipa calore principalmente per convezione, non per conduzione.

Caratteristiche del flusso convettivo mantellico:

1. **Regime stazionario lento:** Nonostante l'altissimo Rayleigh, il numero di Reynolds è basso:

   $Re = \rho_0 v d/\eta$

   Con velocità tipiche $v \approx 5$ cm/anno $= 1{,}6 \times 10^{-9}$ m/s:

   $Re \approx (4500 \times 1{,}6 \times 10^{-9} \times 2{,}9 \times 10^6) / (10^{21}) \approx 2 \times 10^{-17}$

   Il flusso è quindi **completamente laminare**, dominato dalla viscosità, senza turbolenza.

2. **Strati limite termici sottili:** Il rapporto tra spessore dello strato limite termico δ_T e spessore del mantello scala come:

$\delta_T/d \sim Ra^{(-1/3)} \sim (10^7)^{(-1/3)} \approx 0{,}005$

Gli strati limite hanno spessore $\delta_T \approx 15$ km, mentre il nucleo convettivo è praticamente isotermo.

3. **Struttura di placche:** A causa della forte dipendenza della viscosità dalla temperatura (η diminuisce esponenzialmente con T), la litosfera fredda superficiale diventa rigida (alta viscosità) e si comporta come placche che si muovono come corpi rigidi, separate da margini dove si concentra la deformazione.

7.4 Plume Termici e Convezione a Larga Scala

Oltre alla convezione a celle, il mantello presenta strutture su larga scala chiamate **plume termici**: colonne strette di materiale caldo che risalgono dal confine mantello-nucleo (CMB) verso la superficie.

Origine dei plume: Il confine mantello-nucleo ($a \approx 2900$ km di profondità) ha un contrasto termico enorme: il nucleo esterno è a $T \approx 4000$-5000 K, mentre il mantello inferiore adiacente è a $T \approx 2500$ K. Questo crea uno strato limite termico instabile alla base del mantello, da cui si staccano periodicamente plume che risalgono per galleggiamento.

Teoria dei plume: Un modello semplificato di plume prevede una struttura composta da:

- **Testa (head):** Una regione bulbosa in testa al plume, con diametro ~ 500-1000 km
- **Coda (tail):** Un condotto sottile (~100-200 km di diametro) che connette la testa alla sorgente

La velocità di ascesa della testa del plume può essere stimata bilanciando galleggiamento e resistenza viscosa. Per una sfera di raggio R con eccesso di densità $\Delta\rho < 0$ (galleggiamento positivo):

Forza di galleggiamento: $F_b = (4\pi/3)R^3|\Delta\rho|g$ Resistenza di Stokes: $F_d = 6\pi\eta Rv$

All'equilibrio: $v = (2/9)(R^2|\Delta\rho|g)/\eta$

Con $R \approx 500$ km, $|\Delta\rho| \approx 50$ kg/m³ (eccesso termico), $\eta \approx 10^{21}$ Pa·s:

$v \approx (2/9)(5 \times 10^5)^2 \times 50 \times 10 / 10^{21} \approx (2/9) \times 1{,}25 \times 10^{15} / 10^{21} \approx 3 \times 10^{-7}$ m/s ≈ 10 cm/anno

Il tempo per attraversare il mantello (2900 km) è:

$t \approx (2{,}9 \times 10^6 \text{ m}) / (3 \times 10^{-7} \text{ m/s}) \approx 10^{13}$ s ≈ 300 milioni di anni

Evidenze per i plume: I plume sono ipotizzati per spiegare:

- **Hot spots:** Vulcanismo intraplacca persistente (Hawaii, Islanda, Yellowstone)
- **Large Igneous Provinces (LIP):** Eventi di vulcanismo massiccio (trappi siberiani, trappi del Deccan)

- **Anomalie sismiche:** La tomografia sismica rivela zone a bassa velocità che si estendono dalla CMB alla superficie sotto alcuni hotspot (Hawaii, Islanda), interpretate come plume caldi

---

GEOMAGNETISMO E DINAMO TERRESTRE

Capitolo 8: Il Campo Magnetico Terrestre e la Teoria della Dinamo

Il campo magnetico terrestre è uno dei fenomeni geofisici più affascinanti e complessi. La sua esistenza protegge la Terra dal vento solare carico di particelle ad alta energia, rendendo possibile la vita come la conosciamo. Comprendere l'origine e l'evoluzione del campo geomagnetico richiede la fisica della magnetoidrodinamica (MHD) e la teoria della dinamo autoeccitata.

8.1 Struttura del Campo Magnetico Terrestre

Il campo magnetico osservato alla superficie terrestre può essere decomposto in diverse componenti:

1. **Campo principale (main field):** Generato da correnti elettriche nel nucleo esterno liquido. Rappresenta circa il 95% del campo totale. Ha origine interna e varia su scale temporali da anni a milioni di anni.

2. **Campo crostale:** Generato da rocce magnetizzate nella crosta terrestre. Domina su scale spaziali locali (<100 km) ma contribuisce solo pochi percento al campo totale globale.

3. **Campo esterno:** Generato da correnti nella ionosfera e nella magnetosfera. Varia su scale temporali brevi (ore, giorni) ed è influenzato dall'attività solare.

Rappresentazione in armoniche sferiche: Il campo principale, essendo generato da sorgenti interne senza correnti nella regione di osservazione (ipotesi valida fuori dalla litosfera), è irrotazionale e può essere derivato da un potenziale scalare:

$\mathbf{B} = -\nabla \Phi_M$

Il potenziale magnetico soddisfa l'equazione di Laplace:

$\nabla^2 \Phi_M = 0$

In coordinate sferiche (r, θ, φ) dove θ è la colatitudine e φ è la longitudine, la soluzione generale per sorgenti interne è:

$\Phi_M(r,\theta,\varphi) = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a/r)^{n+1} [g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi)] P_n^m(\cos \theta)$

dove:

- a è il raggio di riferimento (tipicamente il raggio terrestre medio, a ≈ 6371 km)
- P_n^m sono i polinomi di Legendre associati di grado n e ordine m
- g_n^m, h_n^m sono i **coefficienti di Gauss**, determinati da misure del campo magnetico

Il termine dominante è il dipolo (n = 1):

Φ_{dipolo} = (a³/r²)[g_1^0 cos θ + g_1^1 cos φ sin θ + h_1^1 sin φ sin θ]

Attualmente (epoca 2025):

- g_1^0 ≈ -29400 nT (componente dipolare assiale, negativa perché il polo magnetico nord è nell'emisfero geografico sud)
- g_1^1 ≈ -1450 nT
- h_1^1 ≈ 4650 nT

Il dipolo è inclinato di circa 10-11° rispetto all'asse di rotazione terrestre.

Intensità del campo: All'equatore magnetico, il campo dipolare ha intensità:

B_{eq} ≈ $\mu_0 M/(4\pi a^3)$ ≈ 30000 nT = 0,3 Gauss

dove M è il momento di dipolo magnetico terrestre:

M ≈ 8 × 10^{22} A·m²

Ai poli magnetici, l'intensità è circa il doppio: B_{pol} ≈ 60000 nT.

8.2 Variazione Secolare e Inversioni del Campo Magnetico

Il campo geomagnetico non è statico ma varia continuamente su diverse scale temporali:

Variazione secolare (secular variation): Variazioni del campo principale su scale temporali di anni-decenni. Ad esempio, i coefficienti di Gauss cambiano tipicamente di 10-100 nT/anno. Fenomeni importanti includono:

- **Deriva verso ovest:** Il campo non-dipolare si muove verso ovest a una velocità di circa 0,2°/anno (completa un giro in ~1800 anni).
- **Movimento dei poli magnetici:** I poli magnetici si spostano. Attualmente, il polo nord magnetico si muove verso la Siberia a una velocità di circa 50-60 km/anno, accelerata rispetto ai 10-15 km/anno del secolo scorso.
- **Indebolimento del dipolo:** Negli ultimi 180 anni, il momento di dipolo è diminuito di circa il 10%, da M ≈ 8,9 × 10^{22} A·m² nel 1840 a M ≈ 8,0 × 10^{22} A·m² oggi.

Inversioni magnetiche: Su scale temporali geologiche (migliaia-milioni di anni), il campo magnetico terrestre può invertire la sua polarità: il polo nord magnetico diventa polo sud e viceversa. L'evidenza proviene principalmente da:

- **Paleomagnetismo:** Rocce magnetiche (basalti, sedimenti) registrano la direzione del campo magnetico al momento della loro formazione. Studi di sequenze stratigrafiche rivelano intervalli con polarità normale (come oggi) alternati a intervalli con polarità inversa.

- **Anomalie magnetiche oceaniche:** Il fondale oceanico, creato per espansione ai margini divergenti (dorsali medio-oceaniche), mostra pattern simmetrici di anomalie magnetiche positive e negative, corrispondenti a epoche di polarità normale e inversa.

Cronologia delle inversioni: La storia dettagliata delle inversioni è stata ricostruita per gli ultimi 200 milioni di anni. Alcune caratteristiche:

- **Frequenza irregolare:** La frequenza delle inversioni varia nel tempo. Negli ultimi 5 milioni di anni, ci sono state circa 20 inversioni (una ogni ~250.000 anni in media). Ma ci sono stati periodi più lunghi senza inversioni (superchron):
    - **Cretaceo normale:** 84-120 milioni di anni fa, nessuna inversione per ~36 milioni di anni
- **Durata delle inversioni:** Il processo di inversione dura tipicamente 1.000-10.000 anni, durante i quali il campo può essere molto debole e la struttura complicata (dipolo non dominante, multipoli superiori importanti).

- **Ultima inversione:** L'ultima inversione è la transizione Matuyama-Brunhes, avvenuta circa 780.000 anni fa. Da allora siamo in un'epoca di polarità normale chiamata **Brunhes**.

Teoria del paleomagnetismo e inversioni:** La magnetizzazione permanente delle rocce (remanent magnetization) fornisce un archivio del campo magnetico antico. Quando rocce ignee si raffreddano al di sotto della **temperatura di Curie** (tipicamente 500-600°C per magnetite), i domini magnetici si allineano con il campo esterno e questa magnetizzazione viene "congelata" nella roccia.

Studiando l'orientazione della magnetizzazione in rocce di età nota (datazione radiometrica), si ricostruisce:

- **Paleointensità:** L'intensità del campo magnetico antico
- **Paleodirezione:** La direzione del campo (inclinazione e declinazione)
- **Movimento delle placche:** Confrontando la paleodirezione con la posizione attuale, si inferisce la deriva delle placche tettoniche (paleolatitudine)

8.3 Teoria della Dinamo Autoeccitata: Fondamenti Fisici

L'origine del campo magnetico terrestre non può essere spiegata da magnetizzazione permanente della Terra (la temperatura del nucleo, ~5000 K, è molto superiore alla temperatura di Curie di qualsiasi materiale) né da correnti elettriche indotte dall'esterno (che decadrebbero rapidamente per resistenza ohmica).

Il campo è invece generato da un processo di **dinamo autoeccitata** nel nucleo esterno fluido, conduttore di elettricità. Il principio fondamentale è che movimenti del fluido conduttore in presenza di un campo magnetico debole possono indurre correnti elettriche che, a loro volta, amplificano il campo magnetico iniziale, in un processo di feedback positivo.

Equazioni della magnetoidrodinamica (MHD): Il sistema accoppiato che governa la dinamo è costituito dalle equazioni dell'idrodinamica incomprimibile più l'equazione di induzione magnetica:

1. **Equazione del moto (Navier-Stokes con forza di Lorentz):** $\rho(\partial \mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \rho \mathbf{g}$

   dove $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ è la forza di Lorentz per unità di volume.

2. **Incomprimibilità:** $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

3. **Legge di Ohm (per un conduttore in movimento):** $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

   dove σ è la conducibilità elettrica.

4. **Legge di Faraday:** $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$

5. **Legge di Ampère (regime magnetoquasistatico, trascurando la corrente di spostamento):** $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$

6. **Conservazione del flusso magnetico ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ sempre):** $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Equazione di induzione: Combinando la legge di Faraday con la legge di Ohm (eliminando $\mathbf{E}$) e usando $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, si ottiene l'**equazione di induzione magnetica**:

$\partial \mathbf{B}/\partial t = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta_m \nabla^2 \mathbf{B}$

dove $\eta_m = 1/(\mu_0 \sigma)$ è la diffusività magnetica.

Questa equazione descrive l'evoluzione del campo magnetico $\mathbf{B}$ in funzione della velocità del fluido $\mathbf{v}$. I due termini a destra hanno interpretazioni fisiche distinte:

- $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$**:** Termine di induzione o trasporto. Descrive come il campo magnetico viene "trascinato" e "stirato" dal fluido in movimento. Questo termine può amplificare il campo.

- $\eta_m \nabla^2 \mathbf{B}$**:** Termine di diffusione ohmica. Descrive il decadimento del campo per resistenza elettrica. Tende sempre a indebolire il campo.

Numero di Reynolds magnetico: Il rapporto tra i due effetti è quantificato dal **numero di Reynolds magnetico**:

$R_m = UL/\eta_m$

dove U è una velocità caratteristica e L una lunghezza caratteristica del flusso.

- **$R_m << 1$:** Diffusione dominante. Il campo decade esponenzialmente con tempo caratteristico $\tau \approx L^2/\eta_m$.
- **$R_m >> 1$:** Induzione dominante. Il campo può essere amplificato dal moto del fluido.

Per il nucleo esterno terrestre:

- $U \approx 10^{-4}$ m/s (velocità tipica stimata da variazione secolare)
- $L \approx 10^6$ m (raggio del nucleo esterno)
- $\sigma \approx 5 \times 10^5$ S/m (conducibilità del ferro liquido)
- $\eta_m = 1/(\mu_0\sigma) \approx 1/(4\pi \times 10^{-7} \times 5 \times 10^5) \approx 1{,}6$ m²/s

Quindi: $R_m \approx (10^{-4} \times 10^6) / 1{,}6 \approx 60$

Il nucleo ha $R_m > 1$, quindi l'induzione può prevalere sulla diffusione, rendendo possibile una dinamo autoeccitata.

Teorema di Cowling: Un importante teorema negativo afferma che una dinamo con simmetria assiale (campo e velocità indipendenti dalla coordinata azimutale φ) non può autosostenersi. Questo implica che **la dinamo terrestre deve essere intrinsecamente tridimensionale**.

8.4 Il Meccanismo α-ω di Generazione del Campo

Sebbene la teoria completa della dinamo sia estremamente complessa e richieda simulazioni numeriche tridimensionali, si può comprendere il meccanismo essenziale attraverso modelli semplificati. Il meccanismo **α-ω** (alfa-omega) è uno dei più influenti.

Effetto ω (stiramento differenziale): Consideriamo un campo magnetico iniziale $\mathbf{B}_0$ con componente poloidale (meridionale, nel piano r-θ). La rotazione differenziale del nucleo (velocità angolare Ω variabile con il raggio e la latitudine) stira le linee di campo nella direzione azimutale φ, generando una componente toroidale (azimutale) del campo:

$\partial B_\varphi/\partial t \approx (r \sin\theta)\, \partial\Omega/\partial r \cdot B_r$

Questo processo converte campo poloidale in campo toroidale ed è generalmente molto efficiente (effetto ω dominante perché $\partial\Omega/\partial r$ può essere grande).

Effetto α (sollevamento e torsione da convezione elicoidale): La convezione turbolenta nel nucleo, influenzata dalla rotazione (forza di Coriolis), tende a essere elicoidale: i moti convettivi hanno sia componenti radiali che rotazionali. Questo moto elicoidale può "torcere" le linee di campo toroidale, richiudendole e generando campo poloidale:

$\partial B_r/\partial t \approx \alpha B_\varphi$

dove α è un coefficiente che quantifica l'intensità dell'effetto elicoidale. Il segno e l'ampiezza di α dipendono dalla struttura della convezione turbolenta.

Ciclo α-ω completo: I due effetti accoppiati creano un ciclo di feedback:

Poloidale → (ω) → Toroidale → (α) → Poloidale → ...

Se questo ciclo è sufficientemente efficiente (α e ω sufficientemente grandi) e ha la fase corretta, il campo può autoeccitarsi esponenzialmente. Raggiunge poi un'ampiezza di saturazione dove effetti nonlineari (forza di Lorentz che modifica il flusso) bilanciano la crescita.

Inversioni magnetiche nel modello α-ω: Le inversioni possono emergere naturalmente da instabilità nel ciclo α-ω. Variazioni nella convezione (e quindi in α) possono destabilizzare il dipolo dominante, permettendo a multipoli superiori di crescere. Durante una fase transitoria caotica (che può durare migliaia di anni), il campo può riorganizzarsi con polarità opposta.

Simulazioni numeriche moderne della dinamo geofisica, che risolvono le equazioni MHD complete in geometria sferica rotante con convezione termochimica, riproducono molte caratteristiche osservate:

- Campo prevalentemente dipolare
- Variazione secolare su decenni-secoli
- Inversioni spontanee irregolari
- Intensità del campo comparabile con quella osservata

OCEANOGRAFIA FISICA - DINAMICA DELLE CORRENTI E CIRCOLAZIONE

Capitolo 9: Correnti Oceaniche e Circolazione Termoalina

Gli oceani coprono circa il 71% della superficie terrestre e giocano un ruolo cruciale nel sistema climatico globale, trasportando enormi quantità di calore dalle regioni tropicali verso i poli e ridistribuendo il carbonio, l'ossigeno e i nutrienti. La dinamica delle correnti oceaniche è governata da equazioni simili a quelle della dinamica atmosferica, ma con importanti differenze dovute alla stratificazione di densità, alla topografia del fondale, e all'interazione con l'atmosfera sovrastante.

9.1 Equazioni Fondamentali della Dinamica Oceanica

Le equazioni che descrivono il movimento degli oceani sono le equazioni di Navier-Stokes per un fluido stratificato in densità, soggetto alla rotazione terrestre (forza di Coriolis), alla gravità, e alle forze superficiali (vento, pressione atmosferica).

Equazioni del moto in coordinate rotanti:

$$D\mathbf{v}/Dt + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -(1/\rho)\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g}$$

dove:

- $\mathbf{v}$ = (u, v, w) è il vettore velocità (u verso est, v verso nord, w verso l'alto)
- $\mathbf{\Omega}$ è il vettore velocità angolare terrestre ($|\mathbf{\Omega}| = 7{,}27 \times 10^{-5}$ rad/s)
- $2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}$ è l'accelerazione di Coriolis
- ρ è la densità dell'acqua
- p è la pressione
- ν è la viscosità cinematica (~ 10^{-6} m²/s per acqua)
- $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ è l'accelerazione gravitazionale ($g \approx 9{,}81$ m/s², $\mathbf{k}$ versore verticale)

Approssimazione di Boussinesq per l'oceano: Come per la convezione mantellica, si assume che le variazioni di densità siano piccole ($\Delta\rho/\rho \sim 0{,}03$) ma importanti nel termine di galleggiamento:

$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

$\rho \approx \rho_0$ (ovunque tranne nel termine gravitazionale)

$\rho = \rho(T, S, p)$ dove T è temperatura, S è salinità, p è pressione

Approssimazione idrostatica: Per movimenti orizzontali con scala verticale molto minore della scala orizzontale (tipico dell'oceano: H ~ 4 km, L ~ 1000 km), l'equilibrio verticale è approssimativamente idrostatico:

$\partial p/\partial z = -\rho g$

Approssimazione del piano β: Per scale spaziali piccole rispetto al raggio terrestre (< 1000 km), si approssima la forza di Coriolis con una dipendenza lineare dalla latitudine:

$f = f_0 + \beta y$

dove $f = 2\Omega \sin\varphi$ è il parametro di Coriolis, φ è la latitudine, y è la coordinata verso nord, $f_0 = 2\Omega \sin\varphi_0$ valutato a una latitudine di riferimento φ_0, e:

$\beta = (2\Omega \cos\varphi_0)/a \approx 2 \times 10^{-11}$ m^{-1} s^{-1} a latitudini medie

con $a \approx 6{,}37 \times 10^6$ m raggio terrestre.

9.2 Correnti Geostrofiche e Circolazione a Larga Scala

A larga scala (> 100 km) e per moti quasi stazionari, l'equilibrio dominante nelle equazioni orizzontali è tra gradiente di pressione e forza di Coriolis, un equilibrio chiamato **geostrofico**:

$f\,\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h = -(1/\rho_0)\nabla_h p$

dove $\mathbf{v}_h = (u, v)$ è la velocità orizzontale e ∇_h è il gradiente orizzontale.

In componenti: $-fv = -(1/\rho_0)\,\partial p/\partial x$ $fu = -(1/\rho_0)\,\partial p/\partial y$

Queste equazioni implicano che **il flusso scorre parallelo alle isobare (linee di pressione costante)**, con la bassa pressione alla sinistra del flusso nell'emisfero nord ($f > 0$) e alla destra nell'emisfero sud ($f < 0$).

Circolazione intorno ai gyre oceanici: Gli oceani sono dominati da grandi sistemi circolatori quasi chiusi chiamati **gyre subtropicali** e **gyre subpolari**. Nell'emisfero nord:

- **Gyre subtropicale** (anticiclonico): Rotazione in senso orario (nell'Atlantico Nord: Corrente del Golfo a ovest, corrente del Nord Atlantico e delle Canarie a est)
- **Gyre subpolare** (ciclonico): Rotazione in senso antiorario

Questi gyre sono forzati dal vento superficiale (alisei tropicali che soffiano verso ovest, venti occidentali alle medie latitudini) e mantenuti dall'equilibrio tra forze di attrito del vento, forza di Coriolis, e gradienti di pressione.

Teoria di Sverdrup: Considerando l'integrale verticale delle equazioni del moto e trascurando l'attrito (eccetto nello strato di Ekman superficiale), Sverdrup derivò una relazione tra il trasporto meridionale integrato e il curl dello stress del vento:

$$\beta V = (1/\rho_0) \, \text{curl}_z \boldsymbol{\tau}$$

dove V è il trasporto verso nord integrato sulla colonna d'acqua, $\boldsymbol{\tau}$ è lo stress del vento superficiale, e curl_z è la componente verticale del rotore.

Questa equazione predice che nelle regioni dove il vento ha rotore positivo (venti che convergono, tipico dei subtropicali), si ha trasporto verso il polo, e viceversa.

Intensificazione occidentale (teoria di Stommel): Un'osservazione chiave è che le correnti sul lato occidentale degli oceani (Gulf Stream, Kuroshio) sono molto più intense e strette delle correnti sul lato orientale (corrente delle Canarie). Stommel (1948) spiegò questo fenomeno includendo l'attrito nella teoria di Sverdrup e considerando la variazione del parametro di Coriolis con la latitudine (effetto β).

L'equazione di Stommel, linearizzata e stazionaria:

$$\beta v = f(\partial w/\partial z) + r\nabla^2\psi$$

dove ψ è la funzione di corrente e r è un coefficiente di attrito. La soluzione mostra che l'aggiustamento necessario per chiudere la circolazione del gyre avviene in uno strato limite stretto lungo il confine occidentale, con larghezza:

$$L_w \sim \sqrt{(r/\beta)} \sim 100 \text{ km}$$

mentre la circolazione nell'interno dell'oceano è molto più ampia (~ 1000 km).

9.3 La Corrente del Golfo e il Sistema Gulf Stream - Corrente del Nord Atlantico

La **Corrente del Golfo** è uno dei sistemi di correnti più importanti e meglio studiati. Essa trasporta enormi quantità di acqua calda e salata dai Caraibi lungo la costa orientale degli Stati Uniti, per poi separarsi dalla costa attorno a Cape Hatteras (35°N) e dirigersi verso nord-est attraverso l'Atlantico come **Corrente del Nord Atlantico**, portando calore verso l'Europa nord-occidentale.

Caratteristiche quantitative:

- **Trasporto di massa:** ~30 Sverdrups (Sv) a Cape Hatteras, fino a 100-150 Sv includendo ricircolazioni (1 Sv = 10^6 m^3/s)
- **Velocità massima:** 2-2,5 m/s in superficie (~ 200 km/giorno)
- **Larghezza:** 50-100 km nella regione intensa
- **Profondità:** Penetra fino a 1000-1500 m
- **Trasporto di calore:** ~ 1,2 PW (petawatt, 10^{15} W) verso nord, equivalente a centinaia di migliaia di centrali elettriche

Questo enorme trasporto di calore ha un impatto climatico significativo, mantenendo l'Europa occidentale molto più calda di regioni alla stessa latitudine in Nord America.

Struttura verticale e meandri: La Corrente del Golfo non è un flusso rettilineo ma presenta:

- **Meandri:** Ondulazioni della corrente con lunghezze d'onda 200-400 km
- **Vortici (eddies):** Si staccano dai meandri formando vortici chiusi che si propagano verso ovest. Vortici caldi (warm core rings) rotanti in senso antiorario contengono acqua del Gulf Stream e si staccano sul lato settentrionale. Vortici freddi (cold core rings) rotanti in senso orario contengono acqua di Labrador e si staccano sul lato meridionale.

Questi vortici possono durare mesi-anni e trasportare calore, sale, e organismi biologici su grandi distanze.

9.4 Circolazione Termoalina Globale (THC)

La **circolazione termoalina** (Thermohaline Circulation, THC) è la circolazione oceanica tridimensionale guidata da differenze di densità causate da variazioni di temperatura (termo-) e salinità (-halina). È anche chiamata **circolazione meridionale atlantica** (Atlantic Meridional Overturning Circulation, AMOC) o più popolarmente "nastro trasportatore globale" (global conveyor belt).

Meccanismo di formazione: La circolazione termoalina è guidata da:

1. **Formazione di acque profonde:** Nelle regioni polari e subpolari (Mar di Groenlandia, Mar di Labrador, Mar di Weddell attorno all'Antartide), l'acqua superficiale si raffredda intensamente in inverno e aumenta di salinità per formazione di ghiaccio (il ghiaccio esclude il sale, lasciando l'acqua circostante più salata). Questa combinazione aumenta la densità, causando sprofondamento (downwelling) dell'acqua fino a profondità di 2000-4000 m.

2. **Flusso profondo:** L'acqua profonda appena formata si muove verso sud (nell'Atlantico) lungo il fondo oceanico, spinta da nuova acqua che continua a sprofondare. Forma la **Corrente Profonda Nord-Atlantica** (North Atlantic Deep Water, NADW) che fluisce verso sud lungo il margine occidentale dell'Atlantico.

3. **Upwelling e ritorno superficiale:** L'acqua profonda gradualmente risale (upwelling) nelle regioni tropicali e temperate, principalmente nell'Oceano Indiano e Pacifico, per mescolamento turbolento e pompaggio di Ekman. L'acqua risalita ritorna in superficie

verso le regioni polari, chiudendo il ciclo.

Scale temporali: La circolazione termoalina è molto lenta:

- Tempo di ricircolo completo: ~ 1000-2000 anni
- Velocità tipiche nella corrente profonda: 1-5 cm/s (0,5-2 km/giorno)

Importanza climatica: La THC trasporta calore verso nord nell'Atlantico (~ 1 PW), influenzando significativamente il clima europeo. Cambiamenti nella forza della THC sono stati implicati in cambiamenti climatici passati:

- **Younger Dryas** (12.900-11.700 anni fa): Raffreddamento brusco probabilmente causato da arresto temporaneo della AMOC per immissione di grandi quantità di acqua dolce da scioglimento glaciale.
- **Eventi Heinrich:** Periodi durante le ere glaciali con rilascio massiccio di iceberg nell'Atlantico Nord, che raffreddavano e diluivano l'oceano superficiale, indebolendo la AMOC.

Vulnerabilità della AMOC al cambiamento climatico: Modelli climatici suggeriscono che il riscaldamento globale potrebbe indebolire la AMOC per due motivi:

1. Aumento delle precipitazioni e dello scioglimento del ghiaccio artico → diluizione dell'acqua superficiale nord-atlantica → riduzione della densità → ridotto sprofondamento
2. Riscaldamento dell'oceano superficiale → riduzione della densità

Un indebolimento significativo della AMOC (20-50% entro il 2100 in scenari ad alte emissioni) potrebbe avere impatti regionali marcati, incluso raffreddamento relativo del Nord Atlantico e dell'Europa, nonostante il riscaldamento globale.

9.5 Maree Oceaniche: Teoria e Fenomenologia

Le maree sono oscillazioni periodiche del livello del mare causate principalmente dall'attrazione gravitazionale della Luna e del Sole. La teoria delle maree è una delle applicazioni più antiche e affascinanti della meccanica celeste e della dinamica dei fluidi.

Forze mareali: La forza mareale deriva dalla variazione spaziale del campo gravitazionale. Consideriamo solo la Luna (il ragionamento è analogo per il Sole). La forza gravitazionale per unità di massa esercitata dalla Luna su un punto della Terra alla distanza r dalla Luna è:

$\mathbf{F} = -GM_L/r^2\ \hat{\mathbf{r}}$

dove M_L è la massa lunare, G la costante gravitazionale. La forza mareale è la differenza tra questa forza e la forza al centro della Terra:

$\mathbf{F}_{marea} = -GM_L[\mathbf{r}/r^3 - \mathbf{R}/R^3]$

dove **R** è il vettore dal centro della Luna al centro della Terra.

Sviluppando per r ≈ R (la variazione sulla superficie terrestre è piccola rispetto alla distanza Terra-Luna):

$F_{marea,r} \approx 2GM_L(r - R)/R^3 \approx 2GM_L a \cos\theta/R^3$

dove a è il raggio terrestre e θ è l'angolo tra la posizione considerata e la linea Terra-Luna.

La componente radiale della forza mareale varia come cos θ, creando due rigonfiamenti (bulges) dell'oceano: uno verso la Luna, uno opposto. Mentre la Terra ruota sotto questi rigonfiamenti, ogni località sperimenta due alte maree e due basse maree al giorno (marea semidiurna).

Equazioni dinamiche delle maree (teoria di Laplace): Per descrivere la risposta dell'oceano alle forze mareali, Laplace derivò le equazioni linearizzate per uno strato fluido su una sfera rotante:

$\partial u/\partial t - fv = -g\,\partial\eta/\partial x + F_x \quad \partial v/\partial t + fu = -g\,\partial\eta/\partial y + F_y \quad \partial\eta/\partial t + H(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y) = 0$

dove:

- u, v sono le componenti della velocità orizzontale
- η è l'elevazione della superficie (altezza della marea)
- H è la profondità media dell'oceano
- F_x, F_y sono le componenti della forza mareale
- f è il parametro di Coriolis

Queste sono equazioni d'onda modificate dalla rotazione e dalla geometria sferica.

Componenti armoniche delle maree: Le forze mareali possono essere decomposte in componenti armoniche di diversi periodi. Le principali sono:

- **M_2 (lunare semidiurna):** Periodo 12,42 ore. Componente dominante, dovuta alla rotazione della Terra sotto i rigonfiamenti lunari.
- **S_2 (solare semidiurna):** Periodo 12,00 ore. Dovuta al Sole.
- **N_2:** Periodo 12,66 ore. Dovuta all'ellitticità dell'orbita lunare.
- **K_1 (lunisolareternata):** Periodo 23,93 ore. Componente diurna.
- **O_1 (lunare diurna):** Periodo 25,82 ore.

L'ampiezza relativa di queste componenti varia con la latitudine e la geometria del bacino oceanico.

Maree di sizigia e di quadratura: Quando Sole e Luna sono allineati (Luna nuova o piena), le loro forze mareali si sommano, creando **maree di sizigia** (spring tides) con escursioni maggiori. Quando sono a 90° (primo e ultimo quarto), le forze si sottraggono parzialmente, creando **maree di quadratura** (neap tides) con escursioni minori.

Risonanza e amplificazione: In bacini oceanici e mari marginali, la risposta mareale può essere amplificata da risonanza se il periodo naturale di oscillazione (seiche) del bacino è vicino al periodo mareale. Ad esempio:

- **Baia di Fundy** (Canada): Escursione mareale fino a 16 m, la più grande al mondo, dovuta a risonanza del bacino con periodo vicino a 12 ore.
- **Canale della Manica:** Escursioni mareali 8-12 m in alcune zone.
- **Mediterraneo:** Maree molto deboli (10-40 cm) perché il bacino è quasi chiuso e non in risonanza.

9.6 Onde Interne Oceaniche

Oltre alle onde superficiali (onde di gravità sulla superficie libera), gli oceani supportano **onde interne** che si propagano lungo pycnoclines (interfacce di densità) all'interno dell'oceano. Queste onde hanno ampiezze molto maggiori delle onde superficiali (decine di metri vs. decimetri) ma frequenze molto minori.

Origine fisica: La stratificazione di densità $\rho(z)$ nell'oceano (densità crescente con la profondità) crea una forza di richiamo gravitazionale su particelle d'acqua spostate verticalmente, simile a una forza elastica. Se una particella di densità ρ_0 viene spostata verticalmente di ζ in un ambiente con gradiente verticale di densità $d\rho/dz$, la forza di richiamo per unità di volume è:

$$F = -(d\rho/dz)\, g\, \zeta$$

Questa è formalmente analoga alla forza di richiamo in un mezzo elastico, con frequenza caratteristica:

$$N^2 = -(g/\rho_0)(d\rho/dz)$$

dove N è la **frequenza di Brunt-Väisälä** (o frequenza di galleggiamento). Tipicamente nell'oceano:

$N \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ rad/s (periodo ~ 10-100 minuti)

Equazione d'onda per onde interne: Per onde interne in un fluido stratificato con variazione di densità debole (approssimazione di Boussinesq), l'equazione d'onda derivata dalle equazioni linearizzate è:

$$\partial^2/\partial t^2[\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial z^2] + N^2(z)\, \partial^2\psi/\partial x^2 = 0$$

dove ψ è la funzione di corrente. Cercando soluzioni piane:

$$\psi = A \sin(mz) \exp[i(kx - \omega t)]$$

si ottiene la **relazione di dispersione**:

$$\omega^2 = N^2k^2/(k^2 + m^2)$$

dove k è il numero d'onda orizzontale e m è il numero d'onda verticale.

Proprietà notevoli:

1. **Frequenza massima:** ω ≤ N. Le onde interne hanno sempre frequenza inferiore alla frequenza di Brunt-Väisälä locale.

2. **Anisotropia:** La velocità di fase e la velocità di gruppo non sono parallele. Le creste d'onda si propagano perpendicolarmente alla velocità di gruppo.

3. **Riflessione da confini:** Onde interne riflesse da confini inclinati (topografia del fondale) possono focalizzare energia in "raggi" che si intensificano, portando a instabilità e breaking.

Generazione: Le onde interne sono generate principalmente da:

- **Interazione della marea barotropica con topografia:** Quando la marea (onda superficiale) fluisce sopra dorsali sottomarine, piattaforme continentali, o rilievi, genera onde interne che si propagano via dal sito di generazione. Queste sono chiamate **maree interne** (internal tides).

- **Instabilità dei fronti oceanici:** Forti gradienti orizzontali di densità possono diventare instabili, generando onde interne.

- **Forzante atmosferica:** Tempeste e variazioni di pressione atmosferica.

Importanza: Le onde interne sono cruciali per:

- **Mescolamento verticale:** Il breaking delle onde interne è un meccanismo primario di mescolamento turbolento dell'oceano profondo, essenziale per la circolazione termoalina.

- **Trasporto di nutrienti:** Il mescolamento porta nutrienti dal profondo verso la zona eufotica, supportando la produttività biologica.

- **Erosione di piattaforme:** Onde interne di grande ampiezza possono erodere sedimenti su piattaforme continentali.

DINAMICA ATMOSFERICA E CLIMA

Capitolo 10: Circolazione Atmosferica Globale e Fenomeni Climatici

L'atmosfera terrestre è un sistema fluido complesso guidato dal riscaldamento solare disomogeneo, dalla rotazione terrestre, e dalle interazioni con oceani, ghiacci e biosfera. La comprensione della dinamica atmosferica è fondamentale per la previsione meteorologica, la climatologia, e la valutazione degli impatti del cambiamento climatico.

10.1 Equazioni Primitive dell'Atmosfera

Le equazioni che governano l'atmosfera sono essenzialmente le stesse della dinamica oceanica, ma con differenze importanti:

1. **Comprimibilità:** L'aria è fortemente comprimibile. La densità varia di un fattore ~10 tra superficie e alta troposfera.

2. **Equazione di stato dei gas ideali:** $p = \rho RT$

   dove $R = 287$ J/(kg·K) è la costante specifica dei gas per aria secca.

3. **Termoidrodinamica:** L'equazione dell'energia include cambiamenti di fase dell'acqua (evaporazione, condensazione, fusione/solidificazione del ghiaccio) che rilasciano o assorbono calore latente.

Sistema completo (equazioni primitive):

$\partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -(1/\rho)\nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{F}$ $\partial \rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0$ $\partial p/\partial z = -\rho g$ (equilibrio idrostatico) $p = \rho RT$ $c_p \partial T/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla T - \omega(RT/p) = Q$

dove:

- $\omega = dp/dt$ è la velocità verticale in coordinate di pressione
- c_p è il calore specifico a pressione costante
- Q rappresenta riscaldamento radiativo, rilascio di calore latente, ecc.
- $\mathbf{F}$ include attriti e trasferimenti turbolenti

10.2 Circolazione di Hadley e Celle di Circolazione Meridionale

La **cella di Hadley** è la circolazione atmosferica meridionale dominante nei tropici, fondamentale per determinare le zone climatiche terrestri.

Descrizione qualitativa:

1. **Ramo ascendente:** Nelle regioni equatoriali (tipicamente 0-10° latitudine), la forte insolazione riscalda la superficie. L'aria calda e umida sale per convezione profonda, formando nubi cumulonembi che producono le intense precipitazioni della Zona di Convergenza Intertropicale (ITCZ).

2. **Flusso verso i poli in quota:** L'aria che è salita fino alla tropopausa (~15-17 km nei tropici) si muove verso nord e sud ad alta quota, allontanandosi dall'equatore.

3. **Ramo discendente:** Attorno a 20-30° di latitudine (entrambi emisferi), l'aria sprofonda (subsidenza). Durante la discesa si comprime e riscalda adiabaticamente, diventando secca. Questo crea le zone subtropicali aride (deserti del Sahara, Arabia, Kalahari, Atacama, Australia).

4. **Flusso di ritorno superficiale (alisei):** In superficie, l'aria fluisce dall'alta pressione subtropicale verso la bassa pressione equatoriale. A causa della rotazione terrestre (Coriolis), questi flussi sono deviati verso ovest, formando gli **alisei** (trade winds): nord-est nell'emisfero nord, sud-est nell'emisfero sud.

Quantificazione - Trasporto di massa: Il trasporto di massa della cella di Hadley può essere stimato da:

$\Psi \sim (R_E \cos \varphi) \int_0^{p_s} v \, dp/g$

dove R_E è il raggio terrestre, φ è la latitudine, v è la velocità meridionale, p_s è la pressione superficiale. Osservazioni e modelli danno:

$\Psi_{Hadley} \sim 10^{10}$ kg/s ~ 100 Sv (unità atmosferica)

Larghezza della cella di Hadley: La latitudine del ramo discendente (bordo della cella) è determinata da un bilancio tra trasporto di momento angolare e forza di Coriolis. Un'analisi semplificata (teoria di Held-Hou) prevede:

$\varphi_{edge} \sim [(g H \Delta\theta)/(\Omega^2 R_E^2 \theta_0)]^{1/2}$

dove $H \sim 15$ km è l'altezza della troposfera, $\Delta\theta \sim 30$ K è il contrasto termico equatore-polo, $\theta_0 \sim 300$ K è la temperatura potenziale media. Numericamente:

$\varphi_{edge} \sim 30°$

in accordo con osservazioni.

Cambiamento climatico e espansione delle celle di Hadley: Osservazioni e modelli indicano che con il riscaldamento globale, le celle di Hadley si stanno espandendo verso i poli di circa 0,5-1° per decade. Questo sposta verso i poli le zone aride subtropicali, con impatti su ecosistemi e agricoltura nelle regioni marginali (Mediterraneo, Sud Africa, Sud Australia).

10.3 Correnti a Getto (Jet Streams)

Le **correnti a getto** (jet streams) sono stretti nastri di venti molto intensi (~50-100 m/s, fino a 150 m/s in eventi estremi) che scorrono da ovest a est ad alte quote (8-15 km) alle medie latitudini. Sono fondamentali per il trasporto di aria, calore e momento angolare, e guidano lo sviluppo di sistemi ciclonici e anticiclonici di superficie.

Origine fisica: Le correnti a getto si formano dove ci sono forti gradienti orizzontali di temperatura. Il bilancio geostrofico in presenza di un gradiente termico meridionale porta a:

$\partial u/\partial z = -(g/fT) \, \partial T/\partial y$

dove u è la componente zonale (est-ovest) del vento, z è l'altezza, f è il parametro di Coriolis, T è la temperatura, e y è la coordinata verso nord. Questa è la **relazione del vento termico**.

Integrando verticalmente la relazione del vento termico dalla superficie fino ad un livello di quota z, otteniamo:

$u(z) = u(0) - (g/f) \int_0^z (1/T) (\partial T/\partial y) dz'$

Questa equazione rivela che le correnti a getto si formano nelle regioni dove il gradiente meridionale di temperatura è massimo. Nelle medie latitudini, questo accade al confine tra masse d'aria tropicali calde e masse d'aria polari fredde, tipicamente lungo i fronti meteorologici principali.

La struttura verticale del jet stream subtropicale: Il jet stream subtropicale si forma al bordo poleward della cella di Hadley, tipicamente attorno ai trenta-quaranta gradi di latitudine. La sua altezza media è circa dieci-dodici chilometri, corrispondente alla tropopausa tropicale. La sua formazione è strettamente legata alla conservazione del momento angolare nelle celle di Hadley. L'aria che scorre verso i poli in quota dalle regioni equatoriali porta con sé momento angolare. Quando raggiunge latitudini più elevate, dove il raggio effettivo di rotazione terrestre è minore ($R_{eff} = R_E \cos \varphi$), deve aumentare la sua velocità zonale per conservare il momento angolare:

$M = (u + \Omega R_E \cos \varphi) R_E \cos \varphi = \text{costante}$

Sviluppando questa relazione e considerando le variazioni di latitudine dalla regione equatoriale ($\varphi \approx 0$) alla regione subtropicale ($\varphi \approx 30°$), si ottiene un incremento di velocità zonale:

$\Delta u \approx \Omega R_E^2 (\sin^2 \varphi)/(\cos \varphi)$

Per $\varphi = 30°$: $\Delta u \approx (7{,}27 \times 10^{-5}) \times (6{,}37 \times 10^6)^2 \times (0{,}5^2)/(0{,}866) \approx 135$ m/s

Questo valore teorico è superiore a quello osservato (tipicamente cinquanta-ottanta metri al secondo) perché in realtà esistono forze frizionali e scambi turbolenti di momento che riducono l'accelerazione del flusso.

Il jet stream polare (polar jet): Il jet stream polare è distinto dal jet subtropicale e si forma a latitudini più elevate (cinquanta-sessanta gradi), tipicamente attorno agli otto-dieci chilometri di altezza. La sua intensità e posizione sono estremamente variabili e dipendono fortemente dal contrasto termico tra le regioni artiche e le medie latitudini. Durante l'inverno, quando questo contrasto è massimo, il jet polare può raggiungere velocità superiori ai centocinquanta metri al secondo nei nuclei più intensi.

La variabilità del jet polare è intimamente connessa con i pattern di circolazione su larga scala noti come modi annulari, in particolare la North Atlantic Oscillation (NAO) e l'Arctic Oscillation (AO). Questi modi descrivono oscillazioni nella posizione latitudinale e nell'intensità del jet stream polare su scale temporali settimanali-stagionali.

Onde di Rossby e ondulazioni del jet stream: Le correnti a getto non scorrono uniformemente in senso zonale, ma presentano ampie ondulazioni meridionali chiamate onde planetarie o onde di Rossby. Queste onde sono una caratteristica fondamentale della circolazione atmosferica delle medie latitudini.

La teoria delle onde di Rossby parte dall'equazione di conservazione della vorticità potenziale in un'atmosfera barotropica (proprietà indipendenti dall'altezza). Per piccole perturbazioni sovrapposte a un flusso zonale di base U, l'equazione linearizzata della vorticità è:

$\partial \zeta'/\partial t + U\, \partial \zeta'/\partial x + \beta\, v' = 0$

dove $\zeta' = \partial v'/\partial x - \partial u'/\partial y$ è la vorticità relativa perturbata, v' è la componente meridionale della velocità perturbata, e $\beta = \partial f/\partial y \approx 2 \times 10^{-11}\ m^{-1}\ s^{-1}$ è il gradiente meridionale del parametro di Coriolis.

Utilizzando la relazione di continuità per flusso incomprimibile ($\partial u'/\partial x + \partial v'/\partial y = 0$), si può introdurre una funzione di corrente ψ tale che:

$u' = -\partial \psi/\partial y,\ v' = \partial \psi/\partial x$

La vorticità diventa: $\zeta' = \nabla^2 \psi$

Sostituendo nell'equazione della vorticità:

$\partial(\nabla^2 \psi)/\partial t + U\, \partial(\nabla^2 \psi)/\partial x + \beta\, \partial \psi/\partial x = 0$

Cercando soluzioni ondulatorie nella forma:

$\psi = A \exp[i(kx + ly - \omega t)]$

dove k è il numero d'onda zonale (direzione est-ovest), l è il numero d'onda meridionale (direzione nord-sud), e ω è la frequenza, otteniamo la relazione di dispersione per le onde di Rossby:

$\omega = Uk - \beta\, k/(k^2 + l^2)$

La velocità di fase nella direzione zonale è:

$c_x = \omega/k = U - \beta/(k^2 + l^2)$

Questa formula rivela una proprietà fondamentale delle onde di Rossby: per flusso zonale positivo ($U > 0$, verso est), se $\beta/(k^2 + l^2) < U$, le onde si propagano verso est ma più lentamente del flusso di base. Se $\beta/(k^2 + l^2) > U$, le onde si propagano verso ovest rispetto al suolo.

La velocità di gruppo (velocità di propagazione dell'energia) è:

$c_{gx} = \partial \omega/\partial k = U - \beta(l^2 - k^2)/(k^2 + l^2)^2\ c_{gy} = \partial \omega/\partial l = 2\beta kl/(k^2 + l^2)^2$

Per onde con lunghezza d'onda grande (k piccolo, l piccolo), la velocità di gruppo può essere diretta verso ovest anche se il flusso di base è verso est. Questo spiega la propagazione retrograda (verso ovest) dell'energia nelle onde planetarie a scala molto grande.

Blocchi atmosferici e pattern persistenti: Le ondulazioni del jet stream possono diventare ampie e quasi-stazionarie, creando configurazioni di blocco (blocking patterns) che persistono per giorni o settimane. Durante un blocco, un'onda di Rossby di grande ampiezza crea una configurazione dove il jet stream presenta una profonda ondulazione meridionale. Tipicamente si forma un anticiclone persistente ad alte latitudini (blocco anticiclonico) che devia il flusso zonale principale e intrappola perturbazioni cicliche a latitudini più basse.

I blocchi atmosferici hanno impatti climatici significativi:

- Durante l'estate, possono causare ondate di calore prolungate (come l'ondata di calore europea del 2003 e quella russa del 2010).
- Durante l'inverno, possono portare irruzioni di aria artica verso le medie latitudini (come il vortex polare spostato verso sud nel Nord America nel gennaio 2014 e 2019).

La fisica dei blocchi è complessa e coinvolge interazioni non lineari tra onde di Rossby, flussi baroclini (con variazione verticale della temperatura), e feedback tra circolazione atmosferica e superficie terrestre. I modelli numerici di previsione meteorologica hanno ancora difficoltà a prevedere accuratamente l'insorgenza, l'intensità e la durata dei blocchi atmosferici.

10.4 El Niño-Southern Oscillation (ENSO): Dinamica Oceano-Atmosfera Accoppiata

L'El Niño-Southern Oscillation rappresenta il modo dominante di variabilità climatica interannuale (scale temporali di due-sette anni) e costituisce l'esempio paradigmatico di un sistema accoppiato oceano-atmosfera. La sua comprensione richiede l'analisi delle interazioni tra circolazione oceanica superficiale, termodinamica della mixed layer oceanica, e circolazione atmosferica tropicale.

Stato normale (condizioni La Niña o neutrali): In condizioni normali, gli alisei (trade winds) soffiano da est verso ovest attraverso il Pacifico equatoriale, spinti dal gradiente di pressione tra l'alta pressione subtropicale orientale e la bassa pressione equatoriale occidentale. Questi venti provocano:

1. Trasporto di Ekman verso ovest dell'acqua superficiale: Il vento esercita uno stress tangenziale sulla superficie oceanica. Nel bilancio geostrofico-Ekman, il trasporto netto nell'oceano superficiale è perpendicolare alla direzione del vento, deviato a destra nell'emisfero nord e a sinistra nell'emisfero sud per effetto Coriolis. All'equatore, dove $f \to 0$, la situazione è più complessa, ma il risultato netto è un trasporto verso ovest.

Il trasporto di Ekman per unità di larghezza è:

$M_E = \tau/(\rho_0 f)$

dove τ è lo stress del vento. All'equatore, utilizzando un'approssimazione del piano beta equatoriale, il trasporto diventa:

$M_E \approx \tau/(\rho_0 \beta y)$

dove y è la distanza dall'equatore.

2. Innalzamento del livello del mare nel Pacifico occidentale: L'accumulo di acqua nel Pacifico occidentale causa un innalzamento del livello del mare di circa quaranta-sessanta centimetri rispetto al Pacifico orientale. Questo crea un gradiente di pressione oceanica zonale.

3. Upwelling equatoriale e costiero: La divergenza meridionale del trasporto di Ekman (allontanamento dall'equatore verso nord e sud) causa upwelling di acqua fredda profonda lungo l'equatore. Inoltre, lungo la costa occidentale del Sud America (Perù, Ecuador), gli alisei del sud-est causano trasporto offshore (verso ovest) che viene compensato da upwelling costiero di acqua fredda ricca di nutrienti.

4. Gradiente termico zonale: La combinazione di upwelling nel Pacifico orientale e accumulo di acqua calda nel Pacifico occidentale crea un forte gradiente di temperatura superficiale del mare (Sea Surface Temperature, SST) zonale: acqua fredda (circa venti-ventiquattro gradi Celsius) nel Pacifico orientale equatoriale, acqua molto calda (circa ventotto-trenta gradi) nel Pacifico occidentale (warm pool).

5. Circolazione di Walker: Il gradiente termico zonale guida una circolazione atmosferica est-ovest chiamata circolazione di Walker. L'aria calda e umida sale per convezione profonda sul Pacifico occidentale caldo (Indonesia, Filippine), formando intensi sistemi convettivi e precipitazioni abbondanti. In quota, l'aria si muove verso est. Nel Pacifico orientale, l'aria sprofonda (subsidenza) sopra l'acqua fredda, inibendo la convezione e creando condizioni relativamente secche. In superficie, l'aria ritorna verso ovest come parte degli alisei, chiudendo la circolazione.

Fase El Niño: Durante un evento El Niño, questo equilibrio viene perturbato:

1. Indebolimento degli alisei: Per ragioni non completamente comprese (ma legate a fluttuazioni caotiche intrinseche nel sistema accoppiato e possibili forzanti esterne come l'attività del Madden-Julian Oscillation), gli alisei nell'equatore centrale-occidentale del Pacifico si indeboliscono o addirittura si invertono temporaneamente (venti da ovest).

2. Rilassamento del livello del mare: L'indebolimento degli alisei riduce il trasporto verso ovest. L'acqua calda accumulata nel Pacifico occidentale si propaga verso est come un'onda di Kelvin equatoriale.

Le onde di Kelvin equatoriali sono modi intrappolati dall'equatore che si propagano solo verso est. La loro struttura verticale dipende dalla stratificazione oceanica. Per un oceano con stratificazione semplificata (modello a due strati: strato superficiale caldo sopra uno strato profondo freddo), la velocità di fase dell'onda di Kelvin è:

$c = \sqrt{(g' H)}$

dove $g' = g\,\Delta\rho/\rho_0$ è la gravità ridotta ($\Delta\rho$ è la differenza di densità tra i due strati), e H è la profondità dello strato superiore. Per valori tipici:

- $g' \approx 0{,}02$ m/s² (differenza di densità circa due chilogrammi per metro cubo)
- $H \approx 150$ m

si ottiene: $c \approx \sqrt{(0{,}02 \times 150)} \approx 1{,}7$ m/s ≈ 150 km/giorno

L'onda di Kelvin attraversa il Pacifico (circa quindicimila chilometri) in circa cento giorni (tre mesi).

3. Approfondimento della termoclina nel Pacifico orientale: Quando l'onda di Kelvin raggiunge il Pacifico orientale, deprimi la termoclina (l'interfaccia tra acqua calda superficiale e acqua fredda profonda), che scende da circa cinquanta metri di profondità a centocinquanta-duecento metri. Questo riduce drasticamente l'efficacia dell'upwelling nel portare acqua fredda in superficie.

4. Riscaldamento del Pacifico orientale: La combinazione di ridotto upwelling, maggior profondità dello strato caldo, e advection verso est di acqua calda porta a un riscaldamento anomalo della superficie del Pacifico centro-orientale equatoriale. Durante eventi El Niño intensi, l'anomalia di SST può superare i tre-quattro gradi Celsius.

5. Feedback atmosferico (Bjerknes feedback): Il riscaldamento del Pacifico orientale sposta verso est il centro della convezione profonda. La circolazione di Walker si indebolisce o addirittura si inverte. L'ulteriore indebolimento degli alisei amplifica il riscaldamento oceanico in un feedback positivo identificato da Jacob Bjerknes negli anni sessanta:

Indebolimento alisei → Riscaldamento Pacifico orientale → Spostamento convettivo verso est → Ulteriore indebolimento alisei

Questo feedback non può crescere indefinitamente. Esistono meccanismi di feedback negativo che eventualmente terminano l'evento El Niño:

- **Onde di Rossby oceaniche:** Il riscaldamento del Pacifico orientale genera onde di Rossby equatoriali che si propagano verso ovest (velocità circa un terzo della velocità delle onde di Kelvin). Quando queste onde riflettono al confine occidentale (coste asiatiche, Australia), generano onde di Kelvin che si propagano verso est trasportando acqua fredda, che raffredda il Pacifico orientale.

- **Oscillatore ritardato:** Il riscaldamento iniziale genera risposte oceaniche (onde) che ritornano dopo un ritardo (circa sei-nove mesi), causando raffreddamento e potenzialmente invertendo la fase del sistema verso La Niña.

Teoria dell'oscillatore ritardato (Delayed Oscillator Theory): Una teoria influente per ENSO, sviluppata negli anni ottanta, modella il sistema come un oscillatore accoppiato con ritardo. Le equazioni semplificate sono:

$dT/dt = \alpha \tau - \gamma T - \varepsilon R(t - \Delta t)$ $d\tau/dt = -r \tau + c T$

dove:

- T è l'anomalia di temperatura superficiale del Pacifico orientale
- τ è l'anomalia dello stress del vento degli alisei
- $R(t - \Delta t)$ rappresenta la risposta ritardata dell'oceano (onde riflesse)
- α, γ, ε, r, c sono parametri empirici del sistema

Il termine $R(t - \Delta t)$ introduce un ritardo temporale Δt (tipicamente sei-dodici mesi) che rappresenta il tempo di propagazione delle onde oceaniche. Questo sistema di equazioni con ritardo può esibire oscillazioni autosostenute con periodo determinato dal ritardo e dai parametri del sistema:

$T_{ENSO} \approx 4 \Delta t \approx$ 2-7 anni

La variabilità irregolare osservata in ENSO deriva da:

- Stocasticità intrinseca (fluttuazioni del vento su scale temporali brevi)
- Nonlinearità nelle interazioni oceano-atmosfera
- Modulazione da parte della variabilità stagionale (seasonal cycle)
- Possibili interazioni con altri modi climatici (Indian Ocean Dipole, Madden-Julian Oscillation)

Impatti globali di ENSO: El Niño ha teleconnessioni climatiche che si estendono ben oltre il Pacifico tropicale:

1. **Precipitazioni:**
    - Aumento delle precipitazioni nel Pacifico equatoriale centrale-orientale, Perù, Ecuador, California meridionale
    - Riduzione delle precipitazioni in Indonesia, Australia settentrionale, India (monsone indiano più debole), Africa meridionale, Brasile nord-orientale
2. **Temperature:**
    - Riscaldamento globale medio di circa zero virgola uno gradi Celsius durante eventi intensi
    - Inverni più caldi nel Canada occidentale e Stati Uniti settentrionali
    - Inverni più freddi e umidi negli Stati Uniti meridionali
3. **Cicloni tropicali:**
    - Aumento dell'attività ciclonica nel Pacifico centrale-orientale
    - Riduzione dell'attività nell'Atlantico (maggiore wind shear verticale inibisce formazione uragani)

4. **Ecosistemi marini:**
    - Crollo delle popolazioni ittiche al largo del Perù (riduzione dell'upwelling ricco di nutrienti)
    - Mortalità di uccelli marini e mammiferi marini
    - Bleaching (sbiancamento) dei coralli nel Pacifico tropicale

Previsione di ENSO: La previsione di ENSO con anticipo di sei-dodici mesi è uno dei successi della moderna climatologia operativa. I metodi includono:

1. **Modelli dinamici accoppiati oceano-atmosfera:** Simulano esplicitamente le equazioni della fisica del sistema. Skill predittiva tipica sei-nove mesi.

2. **Modelli statistici:** Basati su correlazioni empiriche tra precursori oceanici-atmosferici e successivo sviluppo di ENSO. Skill simile ai modelli dinamici.

3. **Modelli ibridi:** Combinano approcci statistici e dinamici.

Il limite di predicibilità intrinseco di ENSO è stimato essere circa dodici-diciotto mesi, limitato dalla crescita di incertezze iniziali (caos deterministico) e da forzanti stocastici (fluttuazioni del vento ad alta frequenza).

10.5 Monsoni: Dinamica delle Circolazioni Stagionali

I monsoni rappresentano inversioni stagionali su larga scala dei venti e delle precipitazioni, guidate dal riscaldamento differenziale tra continenti e oceani. Il monsone più intenso e meglio studiato è il monsone asiatico (in particolare il monsone indiano), ma esistono sistemi monsonici anche in Africa occidentale, Australia, e nelle Americhe.

Monsone indiano - Meccanismo fisico: Durante l'estate boreale (giugno-settembre), il subcontinente indiano si riscalda intensamente per insolazione. La temperatura superficiale può superare i quarantacinque gradi Celsius nelle pianure indo-gangetiche. Questo riscaldamento crea:

1. **Bassa pressione termica continentale:** L'aria calda si espande e sale per convezione, creando una profonda bassa pressione superficiale (depressione monsonica) centrata sul Pakistan-India nord-occidentale.

2. **Gradiente di pressione oceano-continente:** L'Oceano Indiano, con capacità termica molto maggiore, rimane relativamente fresco (SST circa ventotto-trenta gradi). Si crea un forte gradiente di pressione dall'oceano (alta pressione relativa) verso il continente (bassa pressione).

3. **Inversione dei venti:** Il gradiente di pressione guida un flusso su larga scala dall'oceano verso il continente. Nell'emisfero nord, la forza di Coriolis devia questo flusso verso destra, risultando in venti sud-occidentali che portano aria umida dall'Oceano Indiano verso l'India.

4. **Convezione organizzata e precipitazioni intense:** L'aria calda e umida oceanica, quando raggiunge il continente e viene sollevata orograficamente (catene montuose dei Ghati occidentali, Himalaya) o per convergenza di flussi, si raffredda adiabaticamente fino alla condensazione. Si formano sistemi convettivi organizzati di mesoscala che producono precipitazioni estremamente intense. Località come Cherrapunji e Mawsynram nel Meghalaya (India nord-orientale) ricevono oltre undicimila millimetri di precipitazione durante la stagione monsonica (giugno-settembre), rendendole tra i luoghi più piovosi della Terra.

Ruolo della convezione umida e del calore latente: La fisica del monsone non può essere compresa senza considerare il rilascio di calore latente durante la condensazione del vapore acqueo. Quando l'aria umida sale e condensa, rilascia circa $2{,}5 \times 10^6$ joule per chilogrammo di vapore condensato. Questo riscaldamento rinforza la convezione ascendente e approfondisce la bassa pressione superficiale, amplificando la circolazione monsonica.

Il bilancio energetico verticale integrato può essere scritto come:

$$\partial/\partial t \int c_p\, T\, dp + \nabla_h \cdot \int c_p\, T\, v\, dp = \int Q\, dp + L_v\, P$$

dove il termine $L_v P$ rappresenta il riscaldamento per condensazione ($L_v \approx 2{,}5 \times 10^6$ J/kg è il calore latente di vaporizzazione, P è il tasso di precipitazione). Questo termine può essere dell'ordine di centinaia di watt per metro quadrato nelle regioni di intensa precipitazione monsonica, paragonabile o superiore al riscaldamento radiativo solare netto.

Onset del monsone e intraseasonal variability: L'inizio (onset) del monsone indiano avviene tipicamente nella prima settimana di giugno, ma con variabilità interannuale di una-due settimane. Il meccanismo dell'onset è ancora oggetto di ricerca attiva, ma coinvolge:

- Spostamento verso nord della Intertropical Convergence Zone (ITCZ)
- Formazione di depressioni monsooniche nel Golfo del Bengala
- Interazione con la Madden-Julian Oscillation (MJO), un modo di variabilità intrastagionale (trenta-novanta giorni) che si propaga verso est attraverso i tropici

Durante la stagione monsonica, le precipitazioni non sono continue ma presentano periodi attivi (break periods) e inattivi (active periods) con scale temporali di dieci-venti giorni. Questa variabilità intrastagionale è parzialmente legata alla MJO e a oscillazioni quasi-bisetimanali.

Variabilità interannuale del monsone: L'intensità del monsone varia significativamente di anno in anno. Gli indici del monsone (tipicamente basati sulla precipitazione totale stagionale sull'India o su indici di circolazione) hanno deviazione standard circa dieci percento della media. La variabilità è correlata con:

1. **ENSO:** Durante El Niño, il monsone indiano tende a essere più debole (correlazione negativa). Il meccanismo coinvolge lo spostamento verso est della convezione nel Pacifico tropicale, che modifica la circolazione di Walker globale e riduce la

convezione ascendente sull'India.

2. **Indian Ocean Dipole (IOD):** Un modo di variabilità oceano-atmosfera dell'Oceano Indiano tropicale, con fase positiva caratterizzata da acqua fredda al largo di Sumatra e acqua calda nel Oceano Indiano occidentale. IOD positivo è associato a monsoni più deboli.

3. **Condizioni pre-monsoniche:** Anomalie di neve sull'altopiano tibetano, SST nell'Oceano Indiano, e altri precursori sono utilizzati per previsioni stagionali del monsone con skill modesta.

Impatti socio-economici: Il monsone indiano determina circa ottanta percento della precipitazione annuale in India e sostiene l'agricoltura (settecento milioni di persone dipendono direttamente dall'agricoltura monsonica). Variazioni significative hanno impatti catastrofici:

- Monsoni deboli causano siccità, perdite agricole, carenze idriche
- Monsoni molto intensi causano inondazioni devastanti (come le inondazioni del 2018 nel Kerala)

La previsione stagionale affidabile del monsone rimane una delle sfide principali della climatologia operativa.

10.6 Cambiamento Climatico: Forzanti Radiative e Risposta del Sistema Terra

Il cambiamento climatico antropogenico è il risultato di perturbazioni al bilancio energetico radiativo del sistema Terra causate principalmente da emissioni di gas serra (anidride carbonica, metano, protossido d'azoto) e aerosol atmosferici.

Bilancio energetico radiativo globale: Il bilancio energetico della Terra può essere schematizzato come:

Radiazione solare incidente: $S_{in} = (1 - \alpha) S_0 \pi R_E^2$

dove $S_0 \approx 1361$ W/m² è la costante solare, $\alpha \approx 0{,}30$ è l'albedo planetaria (frazione di radiazione riflessa), R_E è il raggio terrestre.

Radiazione infrarossa emessa: $L_{out} = 4\pi R_E^2 \sigma T_e^4$

dove $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/(m² K⁴) è la costante di Stefan-Boltzmann, e T_e è la temperatura effettiva di emissione.

All'equilibrio: $S_{in} = L_{out}$

$(1 - \alpha) S_0/4 = \sigma T_e^4$

$T_e = [(1 - \alpha) S_0/(4\sigma)]^{(1/4)} \approx [(0{,}70 \times 1361)/(4 \times 5{,}67 \times 10^{-8})]^{(1/4)} \approx 255$ K = -18°C

La temperatura superficiale media effettiva è invece circa 288 K = 15°C. La differenza di trentatré gradi è l'effetto serra naturale.

Effetto serra e forzante radiativa: L'atmosfera terrestre è relativamente trasparente alla radiazione solare (lunghezze d'onda 0,3-3 μm, picco a 0,5 μm), ma opaca alla radiazione infrarossa termica emessa dalla superficie (lunghezze d'onda 4-100 μm, picco a 10 μm) a causa dell'assorbimento da parte di gas serra: H_2O (vapore acqueo), CO_2, CH_4, N_2O, O_3, e altri.

Il concetto di forzante radiativa (RF) quantifica la perturbazione al bilancio energetico:

$$RF = \Delta F_{TOA}$$

dove ΔF_{TOA} è la variazione del flusso radiativo netto alla sommità dell'atmosfera (Top Of Atmosphere) causata da una perturbazione del sistema (ad esempio, aumento di CO_2), mantenendo temperatura superficiale e struttura verticale dell'atmosfera fisse (condizione di aggiustamento rapido della stratosfera).

Per il raddoppio della concentrazione di CO_2 (da 280 ppm pre-industriale a 560 ppm), la forzante radiativa è:

$$RF_{2\times CO_2} \approx 3{,}7 \text{ W/m}^2$$

Questa può essere approssimata da una formula logaritmica:

$$RF = \alpha \ln(C/C_0)$$

dove C è la concentrazione attuale, C_0 è la concentrazione di riferimento, e $\alpha \approx 5{,}35$ W/m² per CO_2.

Sensibilità climatica: La risposta del sistema climatico a una forzante radiativa è quantificata dalla sensibilità climatica. La sensibilità climatica di equilibrio (Equilibrium Climate Sensitivity, ECS) è definita come il cambiamento di temperatura superficiale globale media quando il sistema raggiunge un nuovo equilibrio dopo un raddoppio di CO_2:

$$ECS = \Delta T_{2\times CO_2}$$

Dall'equilibrio radiativo perturbato:

$$RF = \lambda \Delta T$$

dove λ è il parametro di feedback climatico (W/(m² K)). Per il sistema Terra:

$$\lambda \approx -1{,}2 \pm 0{,}4 \text{ W/(m}^2\text{ K)}$$

Il segno negativo indica che un aumento di temperatura causa maggiore emissione infrarossa (feedback stabilizzante di Planck).

Quindi: $ECS = RF_{2\times CO_2}/|\lambda| \approx 3{,}7/1{,}2 \approx 3°C$

Le stime più recenti (IPCC AR6, 2021) indicano ECS nell'intervallo 2,5-4,0°C (molto probabile) con valore centrale circa 3°C.

Feedback climatici: La sensibilità climatica effettiva è significativamente maggiore di quella prevista considerando solo il feedback di Planck a causa di molteplici feedback amplificanti:

1. **Feedback del vapore acqueo (positivo, +1,5-2 W/(m² K)):** Temperatura maggiore → maggiore evaporazione → maggiore vapore acqueo atmosferico → maggiore effetto serra → ulteriore riscaldamento. Questo è il feedback positivo più forte.

2. **Feedback lapse-rate (negativo, -0,5 a -1 W/(m² K)):** Riscaldamento maggiore della troposfera superiore rispetto alla superficie aumenta l'emissione infrarossa verso lo spazio.

3. **Feedback delle nubi (incerto, da -0,5 a +1 W/(m² K)):** Le nubi hanno effetti complessi: riflettono radiazione solare (effetto raffreddante) ma intrappolano radiazione infrarossa (effetto riscaldante). I cambiamenti nella copertura, altezza, e proprietà ottiche delle nubi con il riscaldamento sono difficili da modellare. Questo è la maggiore fonte di incertezza nella sensibilità climatica.

4. **Feedback dell'albedo del ghiaccio (positivo, +0,3-0,5 W/(m² K)):** Riduzione di ghiaccio marino e calotte glaciali → riduzione albedo → maggiore assorbimento solare → ulteriore riscaldamento.

Il parametro di feedback totale è:

$\lambda_{tot} = \lambda_{Planck} + \lambda_{vapore} + \lambda_{lapse-rate} + \lambda_{nubi} + \lambda_{albedo} + ...$

10.7 Modelli Climatici Globali: Formulazione Matematica e Numerica

I modelli climatici globali (Global Climate Models, GCM) sono rappresentazioni matematiche tridimensionali del sistema climatico terrestre basate su principi fisici fondamentali. Risolvono numericamente le equazioni della fluidodinamica, termodinamica, e trasferimento radiativo per atmosfera e oceano, accoppiate con modelli di ghiaccio marino, superficie terrestre, e cicli biogeochimici.

Struttura di un GCM atmosferico: Le equazioni primitive dell'atmosfera sono discretizzate su una griglia tridimensionale. Tipicamente:

- Risoluzione orizzontale: 50-200 km (griglia lat-lon o griglia spettrale o icosaedrale)
- Risoluzione verticale: 30-100 livelli dalla superficie fino a 50-80 km di altezza
- Passo temporale: 10-30 minuti per stabilità numerica

Le equazioni sono:

1. **Equazione del moto (momento):** $dv/dt + 2\Omega \times v + (1/\rho)\nabla p - g\,k = F_v$

   dove F_v include diffusione turbolenta, drag orografico, onde di gravità

parametrizzate

2. **Equazione termodinamica:** $c_p \, dT/dt - (RT/p) \, dp/dt = Q_{rad} + L_v(c - e) + Q_{sensibile}$

   dove c è condensazione, e è evaporazione

3. **Equazione di continuità (massa):** $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho v) = 0$

4. **Equazione di stato:** $p = \rho RT$

5. **Equazione dell'umidità:** $dq/dt = -c + e + D_q$

   dove q è umidità specifica, D_q è diffusione

Parametrizzazioni: Processi che avvengono su scale spaziali inferiori alla risoluzione della griglia (sub-grid scale) devono essere parametrizzati in termini di variabili risolte. Le parametrizzazioni principali sono:

1. **Convezione profonda:** Utilizza schemi semi-empirici (es. schema di Arakawa-Schubert, schema di mass-flux) che determinano il profilo verticale di riscaldamento e umidificazione prodotto da celle convettive non risolte.

2. **Turbolenza planetaria boundary layer:** Modella il mescolamento turbolento nello strato limite atmosferico (primo chilometro circa) usando teoria K (coefficienti di diffusione turbolenta verticale).

3. **Nubi e microfisica:** Determina la formazione di nubi, processi di condensazione/evaporazione, formazione di precipitazione (coalescenza di gocce, processo glaciale).

4. **Radiazione:** Risolve il trasferimento radiativo nelle bande solari e infrarosse considerando assorbimento/emissione/scattering da gas, nubi, aerosol. Tipicamente usa il metodo delle due correnti (two-stream approximation) con bande spettrali.

Componente oceanica: I GCM includono modelli oceanici accoppiati che risolvono equazioni simili per l'oceano:

- Primitive equations con approssimazione idrostatica e Boussinesq
- Risoluzione tipica 0,25-1 grado orizzontale, 30-60 livelli verticali
- Parametrizzazioni per mescolamento mesoescale, convezione profonda oceanica

Accoppiamento oceano-atmosfera: L'interfaccia oceano-atmosfera scambia:

- Flussi di calore (radiativo, sensibile, latente)
- Flussi di momento (stress del vento)
- Flussi di acqua dolce (precipitazione, evaporazione)

Questi sono calcolati utilizzando bulk formulas che dipendono dalle differenze di temperatura, umidità, vento tra oceano e atmosfera.

Validazione e skill predittiva: I GCM sono validati confrontando simulazioni con osservazioni storiche (temperatura, precipitazione, circolazione, variabilità come ENSO). Le simulazioni del ventesimo secolo (twentieth century runs) riproducono il riscaldamento osservato solo se includono forzanti antropogeniche (gas serra, aerosol), fornendo evidenza dell'attribuzione del cambiamento climatico.

La skill predittiva dei GCM per proiezioni future (scenari RCP, SSP) ha incertezze dovute a:

- Sensibilità climatica (feedback delle nubi)
- Risposta regionale (precipitazioni)
- Variabilità interna (caos climatico)
- Scenari di emissioni future (incertezza socio-economica)

METODI INVERSI E TOMOGRAFIA SISMICA

Capitolo 11: Teoria Generale dei Problemi Inversi

La geofisica è intrinsecamente una scienza inversa: osserviamo manifestazioni superficiali o remote di proprietà interne della Terra che non possiamo misurare direttamente. Il problema inverso consiste nel determinare la distribuzione spaziale di proprietà fisiche (velocità sismica, densità, conducibilità elettrica, ecc.) a partire da misurazioni indirette (tempi di arrivo sismico, anomalie gravitazionali, anomalie magnetiche, ecc.).

Formulazione generale: Un problema inverso generico può essere formalizzato come:

$d = G(m)$

dove:

- d è il vettore dei dati osservati (dimensione N)
- m è il vettore dei parametri del modello (dimensione M)
- G è l'operatore forward (diretto) che mappa i parametri del modello alle osservazioni

Il problema inverso consiste nel determinare m dato d. Questo è generalmente mal posto nel senso di Hadamard: la soluzione potrebbe non esistere, non essere unica, o essere instabile rispetto a perturbazioni dei dati.

Classificazione dei problemi inversi:

1. **Lineari vs non lineari:** Se G è lineare, $d = Gm$ dove G è una matrice. Altrimenti, il problema è non lineare.

2. **Discreti vs continui:** Se m ha dimensione finita (parametri discreti), il problema è discreto. Se m è una funzione continua m(x), il problema è continuo e richiede discretizzazione.

3. **Determinati vs sovradeterminati vs sottodeterminati:**

    - N = M: determinato (soluzione teoricamente unica)
    - N > M: sovradeterminato (più dati che parametri, soluzione ai minimi quadrati)
    - N < M: sottodeterminato (infinito spazio di soluzioni, richiede regolarizzazione)

Esempio: problema inverso lineare discreto

Consideriamo il problema di determinare il profilo di velocità sismica v(z) come funzione della profondità z, dati i tempi di percorrenza t_i di N raggi sismici.

Discretizziamo v(z) in M strati con velocità costanti v_j:

m = [v_1, v_2, ..., v_M]^T

Il tempo di percorrenza del raggio i è:

t_i = Σ_j (l_{ij}/v_j)

dove l_{ij} è la lunghezza del percorso del raggio i nello strato j. In forma matriciale:

d = Gm

dove: d = [t_1, t_2, ..., t_N]^T G_{ij} = l_{ij}/v_j (problema non lineare in v)

Linearizziamo attorno a un modello di riferimento v_0:

t_i = Σ_j (l_{ij}/v_{0j}) - Σ_j (l_{ij}/v_{0j}²)(v_j - v_{0j})

Definendo le perturbazioni δv_j = v_j - v_{0j} e residui δt_i = t_i - t_i(v_0):

δt = -G_lin δv

dove (G_lin)*{ij}* = *l*{ij}/v_{0j}²

Questo è un problema lineare per le perturbazioni.

11.1 Decomposizione ai Valori Singolari (SVD)

La Singular Value Decomposition è uno strumento fondamentale per l'analisi e soluzione di problemi inversi lineari. Per una matrice G (N × M), la SVD fornisce la decomposizione:

G = U Λ V^T

dove:

- U è una matrice N × N ortogonale (colonne sono vettori singolari sinistri u_i)
- V è una matrice M × M ortogonale (colonne sono vettori singolari destri v_i)
- Λ è una matrice N × M diagonale con elementi non negativi λ_i ≥ 0 (valori singolari) ordinati: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p \geq 0$, dove p = min(N,M)

Proprietà e interpretazione:

1. I vettori singolari formano basi ortonormali: U^T U = I_N, V^T V = I_M

2. L'azione di G può essere scritta come: Gv_i = λ_i u_i (per i ≤ p) Gv_i = 0 (per i > p se M > N)

3. La soluzione ai minimi quadrati di Gm = d (minimizzare ||Gm - d||²) è: m_{LS} = Σ_{i=1}^r (u_i^T d/λ_i) v_i

   dove r = rank(G) è il numero di valori singolari non nulli.

4. Se alcuni λ_i sono molto piccoli (near-zero), i corrispondenti termini (u_i^T d)/λ_i diventano enormi anche per piccole componenti di rumore in d lungo u_i. Questo è il problema della instabilità.

Numero di condizione: Il numero di condizione della matrice G è:

κ(G) = λ_max/λ_min = λ_1/λ_r

Se κ >> 1, il problema è mal condizionato: piccole perturbazioni nei dati causano grandi variazioni nella soluzione.

Risoluzione e null space:

- Lo spazio delle righe di G (row space, span{v_i, i=1,...,r}) rappresenta i modi del modello che sono risolti dai dati.
- Il null space di G (span{v_i, i=r+1,...,M} se M>r) rappresenta i modi del modello che non influenzano i dati osservati (non risolti).

Esempio numerico: Consideriamo un problema inverso semplificato con:

G = [1 2] [2 4] [1 1]

Calcoliamo la SVD:

G^T G = [6 9] [9 21]

Autovalori di G^T G: det(G^T G - λI) = (6-λ)(21-λ) - 81 = λ² - 27λ + 45 = 0

λ_{1,2} = (27 ± √(729-180))/2 = (27 ± √549)/2 ≈ (27 ± 23,43)/2

λ_1 ≈ 25,22, λ_2 ≈ 1,78

Valori singolari: σ_1 = √25,22 ≈ 5,02, σ_2 = √1,78 ≈ 1,33

Numero di condizione: κ ≈ 5,02/1,33 ≈ 3,8 (moderatamente ben condizionato)

11.2 Regolarizzazione di Tikhonov

Per stabilizzare la soluzione di problemi mal posti, si introduce regolarizzazione: si aggiunge informazione a priori sul modello. Il metodo di regolarizzazione più comune è la regolarizzazione di Tikhonov (o ridge regression).

Funzionale regolarizzato:

$S_\alpha(m) = ||Gm - d||^2 + \alpha^2 ||Lm||^2$

dove:

- Il primo termine è il misfit dei dati (data misfit)
- Il secondo termine è la penalizzazione sulla norma del modello
- L è un operatore di regolarizzazione (tipicamente L = I per norma L2, o un operatore di differenza per penalizzare derivate)
- $\alpha > 0$ è il parametro di regolarizzazione

Soluzione: Minimizzando S_α rispetto a m:

$\partial S_\alpha/\partial m = 2G^T(Gm - d) + 2\alpha^2 L^T Lm = 0$

$(G^T G + \alpha^2 L^T L)m = G^T d$

$m_\alpha = (G^T G + \alpha^2 L^T L)^{-1} G^T d$

Questa soluzione esiste ed è unica anche se $G^T G$ è singolare, perché l'aggiunta di $\alpha^2 L^T L$ rende la matrice invertibile.

Formulazione SVD della regolarizzazione di Tikhonov:

Usando la SVD di $G = U \Lambda V^T$, la soluzione regolarizzata può essere scritta come:

$m_\alpha = \Sigma_{i=1}^p (\lambda_i/(\lambda_i^2 + \alpha^2)) (u_i^T d) v_i$

Confrontando con la soluzione ai minimi quadrati non regolarizzata:

$m_{LS} = \Sigma_{i=1}^p (1/\lambda_i) (u_i^T d) v_i$

si nota che i fattori di filtro (filter factors):

$f_i(\alpha) = \lambda_i^2/(\lambda_i^2 + \alpha^2)$

attenuano le componenti corrispondenti ai valori singolari piccoli:

- Per $\lambda_i >> \alpha$: $f_i \approx 1$ (componente non attenuata)
- Per $\lambda_i << \alpha$: $f_i \approx \lambda_i^2/\alpha^2 << 1$ (componente fortemente attenuata)

La regolarizzazione sopprime le componenti instabili (alto numero di modi) della soluzione.

Scelta del parametro di regolarizzazione α:

1. **Curva a L (L-curve):** Si grafica log(||Gm_α - d||) vs log(||Lm_α||) al variare di α. La curva tipicamente ha forma di "L". Il valore ottimale di α è scelto al "gomito" (corner) della L, dove si bilancia minimizzazione del misfit e regolarità della soluzione.

   Matematicamente, il corner corrisponde al massimo della curvatura:

   $\kappa(\alpha) = (\eta'\rho'' - \eta''\rho')/[(\eta')^2 + (\rho')^2]^{3/2}$

   dove $\eta(\alpha) = \log||Gm_\alpha - d||$, $\rho(\alpha) = \log||Lm_\alpha||$

2. **Principio di discrepanza di Morozov:** Si sceglie α tale che:

   $||Gm_\alpha - d|| = \delta$

   dove δ è il livello di rumore stimato nei dati.

3. **Validazione incrociata generalizzata (GCV):**

   Minimizza il funzionale:

   $V(\alpha) = (N\,||Gm_\alpha - d||^2)/(\text{trace}(I - G(G^T G + \alpha^2 I)^{-1}G^T))^2$

4. **Criterio di informazione bayesiano (approccio statistico):**

   Interpretazione: α^2/σ_d^2 rappresenta il rapporto tra varianza a priori del modello e varianza dei dati.

Esempio: inversione tomografica con regolarizzazione

Consideriamo N = 100 osservazioni di tempi di percorrenza e M = 50 parametri (velocità in celle 2D). La matrice G è 100 × 50, generalmente mal condizionata.

Senza regolarizzazione: Molti valori singolari piccoli ($\lambda_i < 0{,}01\,\lambda_{max}$), soluzione dominata da rumore.

Con regolarizzazione di Tikhonov (α scelto tramite L-curve): Soppressione di modi instabili, soluzione liscia che cattura le caratteristiche principali della struttura di velocità.

11.3 Metodi Bayesiani e Inversione Probabilistica

L'approccio bayesiano fornisce un framework rigoroso per incorporare incertezze nei dati e informazioni a priori sul modello, producendo non una singola soluzione ma una distribuzione di probabilità a posteriori sui parametri del modello.

Teorema di Bayes applicato ai problemi inversi:

$p(m|d) = p(d|m)\,p(m) / p(d)$

dove:

- p(m|d) è la distribuzione a posteriori (posterior) dei parametri dato i dati
- p(d|m) è la likelihood (verosimiglianza), la probabilità dei dati dato un modello
- p(m) è la distribuzione a priori (prior) sul modello
- p(d) è l'evidenza (costante di normalizzazione)

Likelihood gaussiana:

Assumendo errori gaussiani indipendenti nei dati con matrice di covarianza C_d:

p(d|m) ∝ exp[-1/2 (d - G(m))^T C_d^{-1} (d - G(m))]

Prior gaussiano:

Assumendo informazione a priori gaussiana con modello medio m_prior e covarianza C_m:

p(m) ∝ exp[-1/2 (m - m_prior)^T C_m^{-1} (m - m_prior)]

Posteriori gaussiano (caso lineare):

Per problema lineare d = Gm, il posteriori è anch'esso gaussiano:

p(m|d) ∝ exp[-1/2 (m - m_post)^T C_post^{-1} (m - m_post)]

dove:

C_post^{-1} = G^T C_d^{-1} G + C_m^{-1} m_post = C_post (G^T C_d^{-1} d + C_m^{-1} m_prior)

La matrice di covarianza a posteriori C_post quantifica le incertezze sui parametri stimati.

Maximum a posteriori (MAP) estimate:

La soluzione MAP è il modello che massimizza p(m|d), equivalente a minimizzare:

S(m) = (d - Gm)^T C_d^{-1} (d - Gm) + (m - m_prior)^T C_m^{-1} (m - m_prior)

Questo è identico alla regolarizzazione di Tikhonov con:

- L = C_m^{-1/2}
- Peso relativo determinato dalle matrici di covarianza

Campionamento Monte Carlo Markov Chain (MCMC):

Per problemi non lineari o con priori non gaussiani, la distribuzione a posteriori non può essere calcolata analiticamente. Si utilizzano metodi MCMC per campionare p(m|d):

1. **Algoritmo di Metropolis-Hastings:**
    - Inizia con un modello m_0

- Proponi un nuovo modello m' da una distribuzione di proposta q(m'|m)
- Accetta m' con probabilità: $\alpha = \min[1, (p(m'|d)\, q(m|m'))/(p(m|d)\, q(m'|m))]$
- Itera fino a convergenza

2. **Gibbs sampling:** Campiona sequenzialmente ogni parametro condizionato sugli altri.

3. **Hamiltonian Monte Carlo (HMC):** Utilizza la dinamica hamiltoniana per proposte efficienti in spazi ad alta dimensionalità.

Applicazione: inversione tomografica bayesiana

Problema: Determinare anomalie di velocità sismica 2D/3D da tempi di percorrenza.

Prior: Modello liscio con correlazioni spaziali: $C_m(r_1, r_2) = \sigma_m^2 \exp(-|r_1 - r_2|^2/l^2)$

dove l è la lunghezza di correlazione.

Likelihood: Tempi osservati con errore σ_d: $p(d|m) \propto \exp[-\Sigma_i (t_i^{obs} - t_i^{calc}(m))^2/(2\sigma_d^2)]$

MCMC genera ensemble di modelli che quantifica trade-off tra risoluzione e incertezza.

11.4 Tomografia Sismica: dalla Teoria alla Pratica

La tomografia sismica utilizza tempi di percorrenza (e più recentemente forme d'onda complete) di onde sismiche da terremoti e sorgenti artificiali per determinare la struttura tridimensionale della velocità sismica all'interno della Terra.

Tomografia locale (Local Earthquake Tomography):

Utilizza terremoti locali registrati da reti sismiche regionali per investigare la crosta e il mantello superiore (profondità 0-200 km) con risoluzione di chilometri-decine di chilometri.

Equazione del problema diretto linearizzato:

$\delta t_i = \Sigma_j (\partial t_i/\partial s_j)\, \delta s_j$

dove:

- δt_i è il residuo di tempo (osservato - calcolato) per il raggio i
- $s_j = 1/v_j$ è la lentezza (reciproco della velocità) nella cella j
- $\partial t_i/\partial s_j$ è la derivata di Fréchet (lunghezza del percorso del raggio i nella cella j)

In forma matriciale: $\delta t = A\, \delta s$

dove A è la matrice delle lunghezze dei percorsi.

Inversione ai minimi quadrati smorzata:

$\min ||A\delta s - \delta t||^2 + \varepsilon^2 ||\delta s||^2$

Soluzione: $\delta s = (A^T A + \varepsilon^2 I)^{-1} A^T \delta t$

Il parametro di smorzamento ε è scelto tramite trade-off curve (misfit vs norma del modello).

Iterazione non lineare:

Poiché i percorsi dei raggi dipendono dal modello di velocità (ray bending), si itera:

1. Calcola percorsi dei raggi nel modello attuale $v^{(k)}$
2. Calcola residui di tempo e matrice $A^{(k)}$
3. Inverti: $\delta s^{(k)} = (A^{(k)})^+ \delta t^{(k)}$
4. Aggiorna: $s^{(k+1)} = s^{(k)} + \alpha \delta s^{(k)}$ ($\alpha < 1$ per stabilità)
5. Ripeti fino a convergenza ($||\delta t|| <$ soglia)

Risoluzione e tests:

Matrice di risoluzione del modello: $R_m = (A^T A + \varepsilon^2 I)^{-1} A^T A$

Idealmente $R_m = I$ (perfetta risoluzione). Nella pratica, R_m ha elementi fuori diagonale che indicano smearing (diffusione spaziale della risoluzione).

Checkerboard test: Si crea un modello sintetico con anomalie alternate (come scacchiera), si calcolano tempi sintetici, si inverte. Se le anomalie sono recuperate correttamente, indica buona risoluzione.

Tomografia globale:

Utilizza terremoti globali registrati da reti sismiche mondiali (migliaia di stazioni) per investigare il mantello e il nucleo.

Parametrizzazione: Espansione in armoniche sferiche (per variazioni laterali) × funzioni radiali (per profondità):

$\delta v(r,\theta,\varphi) = \Sigma_{l,m,n} c_{lmn} Y_l^m(\theta,\varphi) f_n(r)$

dove Y_l^m sono armoniche sferiche, f_n sono funzioni base radiali (spline, polinomi).

Tipicamente: $l_{max} = 20$-40 (risoluzione laterale ~1000-500 km), $N_r = 10$-20 livelli radiali.

Full Waveform Inversion (FWI):

Approccio più avanzato che utilizza l'intera forma d'onda (non solo tempi di arrivo) per vincolare modelli ad alta risoluzione.

Funzionale obiettivo:

$S(m) = 1/2 \Sigma_i \int [u_i^{obs}(t) - u_i^{calc}(m,t)]^2 dt$

dove u_i^{obs} e u_i^{calc} sono sismogrammi osservati e calcolati.

Gradiente del funzionale (metodo dell'aggiunto):

$\nabla_m S = \iiint K(x)\, dx$

dove K(x) è il kernel di sensitività calcolato propagando il campo d'onda diretto e il campo aggiunto (residui retro-propagati nel tempo).

Ottimizzazione: Metodi di gradiente (steepest descent, conjugate gradient) o quasi-Newton (L-BFGS).

FWI richiede:

- Modello iniziale accurato (per evitare cycle skipping)
- Banda di frequenza progressivamente aumentata (multiscale approach)
- Enorme potenza computazionale (simulazioni 3D, migliaia di sorgenti)

Risultati della tomografia globale:

Le immagini tomografiche del mantello rivelano:

1. **Slabs di subduzione:** Zone a alta velocità (fredde) che si estendono dalla superficie fino al mantello inferiore (talvolta fino al confine mantello-nucleo a 2900 km), corrispondenti a placche oceaniche subducenti.

2. **Plume caldi:** Zone a bassa velocità (calde) che salgono dal confine mantello-nucleo, come sotto Hawaii, Islanda, Africa orientale.

3. **LLSVP (Large Low Shear Velocity Provinces):** Due regioni massive a bassa velocità di onde S alla base del mantello sotto Africa e Pacifico, probabilmente zone chimicamente distinte con composizione diversa dal mantello circostante.

4. **Struttura cratonca:** Radici profonde (>200 km) dei continenti antichi (cratoni) visibili come anomalie ad alta velocità, rappresentanti litosfera continentale fredda e depleta.

VULCANISMO E DINAMICA DEL MAGMA

Capitolo 12: Fisica e Reologia del Magma

Il magma è una miscela complessa di roccia fusa (melt silicatico), cristalli solidi, e volatili disciolti (principalmente H_2O e CO_2) o in fase gas (vescicole). La reologia del magma, ovvero la sua risposta a sforzi applicati, governa processi critici come l'ascesa magmatica, la frammentazione esplosiva, e lo stile eruttivo.

Composizione e viscosità del melt silicatico:

La viscosità del magma varia enormemente (oltre dieci ordini di grandezza) a seconda di composizione, temperatura, e contenuto di volatili.

Modello di Arrhenius per viscosità del melt anidro:

$\eta = \eta_0 \exp(E_a/(RT))$

dove:

- η_0 è un fattore pre-esponenziale
- E_a è l'energia di attivazione (50-500 kJ/mol)
- $R = 8{,}314$ J/(mol K) è la costante dei gas
- T è la temperatura assoluta

Per magmi silicei (rioliti): $E_a \sim 400$ kJ/mol, $\eta(800°C) \sim 10^8$-10^{12} Pa·s Per magmi basici (basalti): $E_a \sim 200$ kJ/mol, $\eta(1200°C) \sim 10^1$-10^3 Pa·s

Il contenuto di SiO_2 (silice) è il controllore principale: maggiore SiO_2 → maggiore polimerizzazione del melt → maggiore viscosità.

Effetto dei volatili disciolti:

L'acqua dissolta (tipicamente 0,1-6% in peso) riduce drasticamente la viscosità rompendo i legami Si-O-Si:

$\eta(H_2O) = \eta_{dry} \exp(-\gamma C_{H_2O})$

dove C_{H_2O} è la concentrazione di acqua (wt%), $\gamma \sim 3$-4.

Per esempio, aggiungendo 3% H_2O a un magma riolitico, la viscosità può diminuire di un fattore 100-1000.

Reologia con cristalli (sospensioni magmatiche):

Quando cristalli solidi sono presenti, la viscosità effettiva aumenta. Per basse frazioni di cristalli ($\varphi_c < 0{,}3$):

$\eta_{eff} = \eta_{melt} (1 + 2{,}5\varphi_c + ...)$ (Einstein)

Per frazioni maggiori:

$\eta_{eff} = \eta_{melt} (1 - \varphi_c/\varphi_{max})^{-n}$

dove $\varphi_{max} \sim 0{,}6$-$0{,}7$ è la frazione massima di impaccamento, $n \sim 1{,}5$-$2{,}5$.

A $\varphi_c \to \varphi_{max}$, $\eta_{eff} \to \infty$: la sospensione diventa un solido (yield strength).

Comportamento non newtoniano:

Magmi con alta frazione cristallina o vescicolare possono esibire comportamento pseudoplastico (shear thinning):

$\eta_{eff} = K \dot{\gamma}^{(n-1)}$

dove $\dot{\gamma}$ è il tasso di strain, K è la consistenza, $n < 1$ è l'indice di flusso.

Per n = 1: fluido newtoniano Per n < 1: viscosità diminuisce con tasso di strain (shear thinning)

12.1 Ascesa del Magma e Dinamica dei Condotti

L'ascesa del magma dalla camera magmatica (profondità tipica 2-10 km) alla superficie avviene attraverso condotti o dighe (dike). La dinamica è governata da un bilancio tra forze motrici (galleggiamento, sovrappressione) e forze resistive (viscosità, attrito).

Flusso stazionario in un condotto cilindrico:

Consideriamo un condotto verticale di raggio R. L'equazione del moto in coordinate cilindriche (r, z) per flusso assimetrico stazionario è:

$0 = -\partial p/\partial z + (1/r)\, \partial/\partial r[r\, \eta\, \partial v_z/\partial r] - \rho g$

Assumendo viscosità costante e condizioni al contorno:

- $v_z(R) = 0$ (no-slip alle pareti)
- $\partial v_z/\partial r|_{r=0} = 0$ (simmetria assiale)

Soluzione (flusso di Poiseuille):

$v_z(r) = (R^2/4\eta)(\partial p/\partial z + \rho g)[1 - (r/R)^2]$

Il flusso volumetrico è:

$Q = \int_0^R 2\pi r\, v_z\, dr = (\pi R^4/8\eta)(\partial p/\partial z + \rho g)$

Il gradiente di pressione è determinato dalla sovrappressione nella camera e dalla perdita di carico nel condotto.

Flusso bifasico: magma + volatili essolti:

Durante l'ascesa, la diminuzione di pressione causa essoluzione (nucleazione ed espansione di bolle) dei volatili disciolti. Il sistema diventa bifasico (melt + gas).

Frazione volumetrica di gas (vescicolarità):

$\varphi_g = n V_g/(n V_g + V_m)$

dove n è il numero di bolle per unità volume, V_g è il volume di una bolla, V_m è il volume di melt.

Assumendo gas ideale: $V_g \propto 1/p$

Quindi φ_g aumenta esponenzialmente durante l'ascesa quando p diminuisce.

Modello di flusso a drift (scivolamento tra fasi):

Le bolle possono muoversi relativamente al melt. La velocità di drift (velocità relativa bolla-melt) per bolle sferiche in regime di Stokes è:

$v_d = (2\rho_m g R_b^2)/(9\eta)$

dove R_b è il raggio della bolla, ρ_m è la densità del melt.

Per $R_b = 1$ mm, $\eta = 10^3$ Pa·s, $\rho_m = 2500$ kg/m³:

$v_d \approx (2 \times 2500 \times 10 \times 10^{-6})/(9 \times 10^3) \approx 0{,}0056$ m/s ≈ 0,5 cm/s

Per bolle piccole, il drift è trascurabile. Per bolle grandi (coalescenza) o vescicolarità molto alta, il drift diventa importante.

Transizione effusivo-esplosivo:

La frammentazione (transizione da flusso continuo a dispersione di frammenti) avviene quando lo sforzo esercitato dal gas in espansione supera la resistenza del magma.

Criterio di frammentazione: $\varphi_g > \varphi_{crit} \sim 0{,}7$-$0{,}8$

Alternativamente, criteri basati su tasso di strain:

$\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_{crit} \sim 10^3$-$10^5$ s^{-1}

A alti tassi di deformazione, il magma si comporta come un solido fragile e si frammenta.

12.2 Modelli di Eruzioni Esplosive: Colonne Eruttive

Le eruzioni esplosive producono colonne eruttive che possono raggiungere 10-50 km di altezza, penetrando nella stratosfera e disperdendo cenere su aree continentali.

Teoria della colonna di Morton, Taylor e Turner:

La colonna eruttiva è modellizzata come un plume convettivo turbolento. Le equazioni governanti (integrazione verticale su sezione trasversale) sono:

1. **Conservazione della massa (entrainment):** $d(\rho u \pi r^2)/dz = 2\pi r \rho_a u_e$

   dove u è la velocità verticale media, r è il raggio della colonna, ρ_a è la densità dell'atmosfera ambiente, u_e è la velocità di entrainment laterale.

   Ipotesi di entrainment (Morton et al.): $u_e = \alpha u$, con $\alpha \sim 0{,}1$ (costante di entrainment)

2. **Conservazione del momento:** $d(\rho u^2 \pi r^2)/dz = \pi r^2 g(\rho_a - \rho) - C_D \rho_a u^2 \pi r$

   Il primo termine a destra è la galleggiamento, il secondo è il drag.

3. **Conservazione dell'energia (entalpia):** $d(\rho u\, h\, \pi r^2)/dz = 0$ (processo adiabatico, trascurando radiazione)

   dove h è l'entalpia specifica.

Altezza della colonna:

La colonna sale finché $\rho > \rho_a$ (galleggiamento positivo). L'altezza massima H è determinata da:

$\rho(H) = \rho_a(H)$

Dalla teoria dimensionale (assumendo sorgente puntiforme con flusso di galleggiamento B):

$H \propto B^{1/4}$

dove $B = g\, Q\, \Delta\rho/\rho_a$, Q è il flusso volumetrico eruttivo, $\Delta\rho/\rho_a$ è il contrasto di densità.

Empiricamente (Wilson & Walker):

$H\,[km] \approx 0{,}24\, M^{1/4}$

dove M è il tasso di eruzione in massa [kg/s].

Per eruzioni pliniane: $M \sim 10^7$-10^9 kg/s → H ~ 20-45 km

Collasso della colonna:

Se il tasso di eruzione diminuisce o la frazione di particelle dense aumenta, $\rho > \rho_a$ non può essere raggiunta: la colonna collassa formando flussi piroclastici (density currents).

Criterio empirico (Wilson): Collasso quando:

$n < 0{,}01$ [massa volatili/massa totale]

12.3 Flussi Piroclastici: Dinamica dei Density Currents

I flussi piroclastici sono correnti gravitazionali ad alta densità ($\rho \sim 500$-1500 kg/m³) che scorrono lungo i fianchi dei vulcani a velocità 50-150 m/s.

Equazioni di shallow water per flussi granulari:

Integrando verticalmente le equazioni del moto (assumendo pressione idrostatica):

$\partial h/\partial t + \partial(hu)/\partial x = 0$ (continuità) $\partial(hu)/\partial t + \partial(hu^2)/\partial x = gh \sin(\theta) - (\rho_a/\rho)\, gh \sin(\theta) - (gh \cos(\theta)/\tan(\varphi)) - C_D\, u^2$

dove:

- h è lo spessore del flusso

- u è la velocità media
- θ è la pendenza del terreno
- φ è l'angolo di attrito interno
- C_D è il coefficiente di drag

Il termine (gh cos(θ)/tan(φ)) rappresenta l'attrito basale (modello Coulomb).

Numero di Froude densimetrico:

Fr = u/√(gh(ρ - ρ_a)/ρ)

Flussi piroclastici: Fr ~ 1-5 (supercritico, flusso molto veloce)

Runout (distanza percorsa):

La distanza percorsa da un flusso piroclastico dipende da:

- Volume iniziale
- Topografia
- Attrito efficace

Modelli numerici risolvono le equazioni di shallow water su DEM (Digital Elevation Models) per prevedere aree a rischio.

12.4 Monitoraggio Vulcanico e Precursori Eruttivi

Il monitoraggio vulcanico integra multiple tecniche geofisiche per rilevare precursori di eruzioni:

1. Sismicità:

Eventi sismici precursori includono:

- Volcano-Tectonic (VT) earthquakes: fratturazione fragile indotta da stress magmatico
- Long-Period (LP) events: risonanza di condotti/cavità riempite di fluido
- Tremor vulcanico: segnale sismico continuo associato a flusso turbolento di magma/gas

Aumento di frequenza e magnitudo di VT spesso precede eruzioni (ore-giorni).

Localizzazione ipocentrale (metodi tomografici) traccia migrazione del magma:

- Migrazione verso l'alto indica ascesa
- Concentrazione sotto cratere indica riempimento reservoir superficiale

2. Deformazione del suolo:

Intrusione di magma causa:

- Inflazione (rigonfiamento) del vulcano
- Subsidenza dopo eruzione (svuotamento camera)

Tecniche di misura:

- GPS continuo (precisione ~mm)
- InSAR (Interferometric Synthetic Aperture Radar) da satelliti (risoluzione spaziale ~10 m, precisione verticale ~cm)
- Tiltmetri (sensibili a inclinazioni ~1 microradiante)

Modelli sorgente:

Mogi source (sfera pressurizzata in semispazio elastico):

Spostamento verticale alla superficie:

$u_z(r) = (\Delta V/\pi) (z_0/(r^2 + z_0^2)^{3/2})$

dove ΔV è la variazione di volume, z_0 è la profondità, r è la distanza radiale.

Inversione dei dati di deformazione per stimare posizione, profondità, e variazione volume della camera magmatica.

3. Emissioni di gas:

Flussi di SO_2, CO_2, H_2S misurati con:

- COSPEC/DOAS (spettrometria UV remota)
- MultiGAS (sensori in situ)
- Satelliti (OMI, TROPOMI)

Aumento di flusso SO_2 indica:

- Intrusione di magma fresco (degassamento)
- Aumento della permeabilità del condotto

Rapporti CO_2/SO_2 informano su profondità di essoluzione (CO_2 essolve più profondo di SO_2).

4. Geotermia e infrasuoni:

- Camere termiche infrarosse: monitoraggio continuo temperatura cratere
- Infrasuoni: onde sonore a bassa frequenza (<20 Hz) da esplosioni vulcaniche, propagano a grandi distanze

Alberi di decisione per allerta:

Integrazione multiparametrica:

- Livello verde (normale): parametri baseline
- Livello giallo (attenzione): anomalie in 1-2 parametri
- Livello arancione (pre-allerta): anomalie multiple, trend acceleranti
- Livello rosso (eruzione imminente/in corso): tutti i parametri critici

Esempi di successo:

- Evacuazione >50.000 persone prima eruzione Pinatubo (1991), morti <300 (vs previsti ~20.000)

Sfide:

- False allarmi (costi economici, psicologici)
- Variabilità tra vulcani (no "pattern universale")
- Previsione timing preciso (ore/giorni) ancora difficile

GEOFISICA SPAZIALE E MAGNETOSFERA

Capitolo 13: Il Campo Magnetico Terrestre nello Spazio Interplanetario

Il campo magnetico terrestre si estende nello spazio circostante, creando una cavità magnetica chiamata magnetosfera che scherma la Terra dal vento solare.

Vento solare:

Il Sole emette continuamente un flusso di plasma (protoni, elettroni, ioni) chiamato vento solare. Parametri tipici a 1 AU (distanza Terra-Sole):

- Densità: $n \sim 5\text{-}10\ cm^{-3}$
- Velocità: $v \sim 400\text{-}600$ km/s (vento lento), 600-800 km/s (vento veloce)
- Temperatura: $T \sim 10^5$ K
- Campo magnetico interplanetario (IMF): $B \sim 5$ nT

Pressione dinamica del vento solare:

$$p_{sw} = \rho v^2/2 + nkT + B^2/(2\mu_0)$$

Tipicamente $p_{sw} \sim 1\text{-}2$ nPa (nanopascal) = 10^{-9} Pa

13.1 Magnetopausa e Forma della Magnetosfera

Equilibrio di pressione alla magnetopausa:

La magnetopausa è il confine dove la pressione magnetica terrestre bilancia la pressione del vento solare:

$$B_{Terra}^2/(2\mu_0) = p_{sw}$$

Dalla teoria del campo dipolare, alla distanza r dal centro Terra in direzione equatoriale:

$$B_{dipolo}(r) = (\mu_0/4\pi)\ (M/r^3)$$

dove $M \sim 8 \times 10^{22}$ A m² è il momento di dipolo terrestre.

Equagliando le pressioni:

$$r_{mp} = [(\mu_0 M^2)/(32\pi^2 p_{sw})]^{1/6}$$

Per $p_{sw} \sim 1{,}5$ nPa:

$r_{mp} \sim 10$-$12\ R_E$ (subsolar point, dalla parte del Sole)

dove $R_E = 6371$ km è il raggio terrestre.

Forma asimmetrica:

Il vento solare comprime la magnetosfera dal lato solare e la allunga dalla parte opposta (coda magnetica o magnetotail) che si estende oltre $1000\ R_E$ (≈ 200 raggi lunari).

Modello Chapman-Ferraro:

Il primo modello quantitativo (Chapman & Ferraro, 1930) tratta la magnetopausa come una corrente superficiale che scherma il campo dipolare dal vento solare.

Densità di corrente superficiale (Chapman-Ferraro):

$$K_{CF} = (2\ B_{dipolo} \times \hat{n})/(\mu_0)$$

dove $\hat{n}$ è la normale alla magnetopausa.

Questa corrente produce un campo magnetico che si oppone al campo dipolare esterno, confinandolo nella magnetosfera.

13.2 Riconnessione Magnetica e Accoppiamento Magnetosfera-Vento Solare

Il vento solare non è completamente schermato: esiste un accoppiamento significativo attraverso la riconnessione magnetica.

Riconnessione magnetica:

Processo fondamentale in plasmi dove linee di campo magnetico con orientazioni opposte si "riconnettono", convertendo energia magnetica in energia cinetica e termica del plasma.

Configurazione tipica: Due regioni con campi antiparalleli separate da uno strato sottile (current sheet):

$$B_1 = B_0\ \hat{x}\ (z > 0)\quad B_2 = -B_0\ \hat{x}\ (z < 0)$$

La legge di Ohm generalizzata in un plasma è:

$$E + v \times B = \eta\ J + (J \times B)/(ne) - \nabla p_e/(ne) + m_e/(ne^2)\ (\partial J/\partial t + \nabla \cdot (J\ J))$$

dove il termine $\eta\ J$ è la resistività (dominante in riconnessione resistiva classica), gli altri termini sono effetti collisionless (Hall, gradiente pressione elettronica).

Tasso di riconnessione:

Il tasso di riconnessione è quantificato dal campo elettrico E_{rec} nel punto X (punto di riconnessione).

Modello Sweet-Parker (riconnessione resistiva):

$E_{rec} \sim (\eta/L) B_0 v_A$

dove L è la lunghezza dello strato corrente, $v_A = B_0/\sqrt{(\mu_0 \rho)}$ è la velocità di Alfvén.

Questo modello predice tassi molto lenti (inadeguati per fenomeni osservati).

Modello Petschek (riconnessione rapida):

Introduce onde MHD (slow shocks) che accelerano il deflusso. Tasso:

$E_{rec} \sim (\pi/8) B_0 v_A / \ln(L/\delta)$

dove δ è lo spessore della diffusion region. Molto più rapido, ma richiede condizioni speciali.

Riconnessione collisionless:

Nella magnetosfera (plasma diluito), effetti cinetici dominano. La riconnessione avviene su scala della lunghezza inerziale ionica:

$d_i = c/\omega_{pi} = c\sqrt{(m_i \varepsilon_0/(n e^2))} \sim 100$ km (nella magnetopausa)

Riconnessione alla magnetopausa:

Quando l'IMF (campo magnetico interplanetario) ha componente verso sud ($B_z < 0$), può riconnettersi con il campo magnetico terrestre (diretto verso nord alle alte latitudini). Questo:

1. Apre" la magnetopausa, permettendo ingresso di plasma solare
2. Trasporta flusso magnetico dalla parte diurna alla coda magnetica
3. Genera circolazione convettiva nella magnetosfera

Parametro di controllo: Funzione di accoppiamento di Akasofu:

$\varepsilon = (v B^2/\mu_0) l_0^2 \sin^4(\theta/2)$

dove $l_0 \sim 7 R_E$ è una scala caratteristica, θ è l'angolo di clock dell'IMF (θ = 180° per B_z completamente verso sud).

Per forte accoppiamento: $\varepsilon \sim 10^{12}$ W (1 terawatt), energia comparabile a grandi tempeste geomagnetiche.

13.3 Fasce di Van Allen e Particelle Intrappolate

Le fasce di Van Allen sono regioni toroidali attorno alla Terra dove particelle cariche (protoni, elettroni) sono intrappolate dal campo magnetico terrestre.

Moto adiabatico di particelle cariche:

Una particella carica in un campo magnetico subisce tre moti periodici con scale temporali separate:

1. **Girazione (gyration):** Orbita circolare attorno alla linea di campo

    - Frequenza: $\omega_c = qB/m$ (ciclotrone)
    - Raggio: $r_L = mv_\perp/(qB)$ (raggio di Larmor)
2. Per elettroni 100 keV in B = 100 nT: $r_L \sim 100$ km

3. **Bounce (rimbalzo):** Oscillazione lungo la linea di campo tra punti specchio (mirror points) nell'emisfero nord e sud

    - Periodo: $T_b \sim 2L/(v_\parallel) \sim 1$ s (dipende da L)
    - Punto specchio: dove $v_\parallel = 0$, determinato da conservazione del momento magnetico
4. **Drift azimutale:** Deriva attorno alla Terra in direzione est-ovest

    - Frequenza: $\omega_d \sim (v_\perp^2 + 2v_\parallel^2)/(2\omega_c R L)$
    - Periodo: $T_d \sim$ ore (elettroni verso est, protoni verso ovest)

Invarianti adiabatici:

Se i campi variano lentamente rispetto ai periodi del moto, esistono tre quantità conservate:

1. **Primo invariante (momento magnetico):** $\mu = m v_\perp^2/(2B)$ = costante

    Implica che $v_\perp$ aumenta quando la particella si muove verso regioni di B maggiore.

2. **Secondo invariante (invariante longitudinale):** $J = \oint m v_\parallel ds$ = costante

    (integrale lungo una bounce)

3. **Terzo invariante (flusso magnetico):** $\Phi = \int B \cdot dA$ = costante

    (flusso attraverso la drift shell)

Struttura delle fasce:

- **Fascia interna:** Protoni energetici (10-100 MeV) e elettroni (0,1-5 MeV)

    - Distanza: $L \sim 1{,}2\text{-}2{,}5\ R_E$
    - Origine: decadimento di neutroni da raggi cosmici (CRAND - Cosmic Ray Albedo Neutron Decay)
- **Slot region:** Deplezione relativa ($L \sim 2{,}5\text{-}3$)

- **Fascia esterna:** Elettroni molto energetici (0,5-5 MeV)

    - Distanza: $L \sim 3\text{-}7\ R_E$
    - Origine: accelerazione locale da onde plasma (chorus waves)

- Dinamica molto variabile (tempeste geomagnetiche)

Meccanismi di perdita:

1. **Collisioni con atmosfera neutra:** Particelle a bassa quota (L < 1,2) perdono energia e precipitano

2. **Scattering da onde plasma:** Onde elettromagnetiche (VLF, chorus, hiss) causano diffusione in pitch angle, portando particelle nel loss cone (cono di perdita dove precipitano)

3. **Magnetopause shadowing:** Durante compressioni della magnetosfera, le orbite di deriva intersecano la magnetopausa e le particelle escono

13.4 Aurore: Fisica e Fenomenologia

Le aurore boreali e australi sono manifestazioni visibili dell'interazione magnetosfera-ionosfera-atmosfera.

Meccanismo di emissione:

1. **Precipitazione di elettroni energetici:** Durante disturbi geomagnetici (substorms), elettroni accelerati (1-10 keV) precipitano lungo linee di campo magnetico nell'atmosfera polare.

2. **Eccitazione e ionizzazione:** Collisioni con molecole atmosferiche (O, O_2, N_2) a 100-300 km di altezza:

   - $e^- + O \rightarrow O^* + e^-$ (eccitazione)
   - $O^* \rightarrow O + h\nu$ (emissione verde $\lambda = 557{,}7$ nm)
3. Emissioni principali:

   - Verde: O (557,7 nm) - più comune, 100-150 km
   - Rosso: O (630,0 nm) - alta quota >200 km
   - Blu/violetto: N_2^+ (391,4 nm, 427,8 nm)
   - Rosso: N_2 (primo sistema positivo)
4. **Intensità:** Dipende da flusso di energia precipitante

   - Aurora quieta: 1-10 mW/m²
   - Aurora attiva: 10-100 mW/m²
   - Aurora molto intensa: >100 mW/m²

Morfologia aurorale:

- **Archi aurorali:** Strutture allungate est-ovest lungo linee di campo magnetico
- **Bande aurorali:** Regioni diffuse
- **Corona aurorale:** Convergenza prospettica di raggi verso zenith magnetico
- **Aurore pulsanti:** Modulazioni temporali (sec-min) dell'intensità

Ovale aurorale:

L'aurora forma un ovale attorno al polo magnetico, non geografico.

Posizione (latitudine magnetica):

- Condizioni quiete: 65-70° lat. mag.
- Tempeste geomagnetiche: può espandersi fino a 50° lat. mag. (visibile da latitudini medie)

Correnti elettriche associate:

Le aurore sono associate a sistemi di correnti ionosferiche:

1. **Electrojet aurorale:** Corrente elettrica intensa (~10^6 A) nella ionosfera aurorale a ~100-120 km, direzione est-ovest

2. **Field-aligned currents (Birkeland currents):** Correnti che fluiscono lungo linee di campo magnetico tra magnetosfera e ionosfera, portano correnti di ~1 MA

Queste correnti creano perturbazioni geomagnetiche misurabili da magnetometri a terra.

Tempeste geomagnetiche e substorms:

- **Substorm:** Evento di 1-3 ore con espansione improvvisa dell'aurora, intensificazione di correnti, accelerazione di particelle. Ciclo:

    1. Growth phase: accumulo di energia nella coda magnetica
    2. Expansion phase: riconnessione esplosiva, rilascio energia (~10^{15} J)
    3. Recovery phase: ritorno a condizioni quiete
- **Tempesta geomagnetica:** Evento di 1-3 giorni con perturbazioni globali del campo magnetico, intensificazione fasce Van Allen, aurore a latitudini medie.

Indice Dst (Disturbance Storm Time):

- Condizioni quiete: Dst > -30 nT
- Tempesta moderata: -50 > Dst > -100 nT
- Tempesta intensa: Dst < -100 nT
- Tempesta estrema: Dst < -250 nT (come tempesta Carrington 1859, Dst stimato ~ -1000 nT)

Impatti tecnologici:

Tempeste geomagnetiche causano:

1. Correnti indotte in reti elettriche (GIC - Geomagnetically Induced Currents) → blackout (Quebec 1989)
2. Degradazione satelliti (drag atmosferico aumentato, carica superficiale)

3. Disturbi GPS/comunicazioni radio
4. Aumento radiazione per astronauti/voli polari

Space Weather forecasting:

Previsione basata su:

- Monitoraggio solare (sunspots, CME - Coronal Mass Ejections)
- Satelliti L1 (SOHO, ACE, DSCOVR) a 1,5 milioni km dalla Terra: early warning ~30-60 min prima arrivo CME
- Modelli MHD globali magnetosfera (BATSRUS, OpenGGCM)
- Indici geomagnetici (Kp, Dst)

Geofisica della Litosfera e Tettonica delle Placche

1.1 Introduzione alla Reologia Litosferica

La litosfera terrestre rappresenta lo strato rigido più esterno del nostro pianeta, un guscio che galleggia sul mantello astenosferico sottostante e che governa la dinamica tettonica globale. La comprensione del comportamento meccanico della litosfera richiede una trattazione reologica sofisticata, capace di descrivere la risposta del materiale roccioso a diverse scale temporali e condizioni di stress. La reologia, dal greco "rheos" (flusso) e "logos" (studio), costituisce il fondamento teorico per interpretare fenomeni che spaziano dalla propagazione delle onde sismiche, che avviene in frazioni di secondo, fino ai movimenti tettonici che si sviluppano su milioni di anni.

La litosfera non è un corpo puramente elastico né puramente viscoso, ma presenta un comportamento complesso che dipende criticamente dalla temperatura, dalla pressione, dalla composizione mineralogica, dal contenuto di fluidi e soprattutto dalla scala temporale del processo deformativo considerato. Questa complessità si manifesta in modo drammatico quando si confrontano fenomeni apparentemente contraddittori: le stesse rocce che trasmettono onde sismiche elasticamente su scale di secondi, si deformano in modo duttile su scale geologiche, permettendo la subduzione delle placche oceaniche e la formazione delle catene montuose.

1.2 Fondamenti della Teoria della Viscoelasticità

La teoria viscoelastica fornisce il quadro matematico necessario per descrivere materiali che esibiscono simultaneamente proprietà elastiche e viscose. Per un materiale viscoelastico lineare, la relazione costitutiva generale tra lo stress $\sigma(t)$ e la deformazione $\varepsilon(t)$ può essere espressa attraverso un'equazione integro-differenziale che coinvolge la funzione di rilassamento $G(t)$:

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t - t') \, d\varepsilon(t')/dt' \, dt'$$

Questa formulazione, nota come principio di sovrapposizione di Boltzmann, afferma che lo stress al tempo t dipende da tutta la storia della deformazione attraverso il kernel di rilassamento G(t - t'). La funzione di rilassamento rappresenta la risposta dello stress a una deformazione a gradino unitario applicata al tempo t = 0 e descrive come lo stress "rilassa" nel tempo a deformazione costante.

Per materiali viscoelastici semplici, possiamo utilizzare modelli meccanici analoghi costituiti da combinazioni di molle (elementi elastici) e ammortizzatori (elementi viscosi). Il modello di Maxwell, che consiste in una molla e un ammortizzatore in serie, è particolarmente rilevante per la litosfera. In questo modello, la relazione costitutiva unidimensionale assume la forma:

$$\sigma + (\eta/E) \, d\sigma/dt = \eta \, d\varepsilon/dt$$

dove E rappresenta il modulo elastico (modulo di Young) e η indica la viscosità dinamica. Questa equazione differenziale può essere risolta per diverse condizioni al contorno. Per un test di rilassamento dello stress, dove si applica una deformazione istantanea ε_0 al tempo t = 0 e poi si mantiene costante, la soluzione è:

$$\sigma(t) = E \, \varepsilon_0 \exp(-t/\tau_M)$$

dove $\tau_M = \eta/E$ è il tempo di rilassamento di Maxwell, un parametro fondamentale che caratterizza la transizione tra comportamento elastico e viscoso. Per tempi $t \ll \tau_M$, il materiale si comporta come un solido elastico, mentre per $t \gg \tau_M$ domina il comportamento viscoso.

Per la litosfera terrestre, i valori tipici sono $E \approx 10^{11}$ Pa e $\eta \approx 10^{22}$ Pa·s (per il mantello superiore), il che porta a un tempo di rilassamento $\tau_M \approx 10^{11}$ s ≈ 3000 anni. Questo valore ha implicazioni profonde: i terremoti, con durate di secondi o minuti, inducono una risposta puramente elastica, mentre i processi tettonici, che operano su milioni di anni, vedono la litosfera comportarsi essenzialmente come un fluido viscoso.

Il modello di Kelvin-Voigt, che consiste invece in una molla e un ammortizzatore in parallelo, descrive un comportamento diverso con l'equazione costitutiva:

$$\sigma = E \, \varepsilon + \eta \, d\varepsilon/dt$$

Questo modello è più appropriato per descrivere il comportamento di materiali che mostrano creep transitorio (deformazione viscosa che si stabilizza asintoticamente). La risposta a uno stress costante σ_0 applicato al tempo t = 0 è:

$$\varepsilon(t) = (\sigma_0/E) \, [1 - \exp(-t/\tau_r)]$$

dove $\tau_r = \eta/E$ è il tempo di ritardo. A differenza del modello di Maxwell, il modello di Kelvin-Voigt non può descrivere il rilassamento dello stress a deformazione costante.

Per una descrizione più realistica del comportamento litosferico, si utilizza il modello standard lineare solido (Standard Linear Solid, SLS), noto anche come modello di Zener, che combina elementi di Maxwell e Kelvin-Voigt. Questo modello richiede tre parametri indipendenti e può descrivere sia il rilassamento dello stress sia il creep con recupero parziale. L'equazione costitutiva del modello SLS è:

$\sigma + \tau_e \, d\sigma/dt = E_0 \, \varepsilon + \tau\square \, E_0 \, d\varepsilon/dt$

dove τ_e è il tempo di rilassamento a deformazione costante e $\tau\square$ è il tempo di creep a stress costante, con E_0 che rappresenta il modulo elastico a lungo termine. Il rapporto $\tau\square/\tau_e$ definisce il modulo di rilassamento normalizzato.

1.3 Leggi di Flusso e Deformazione Duttile

Quando la scala temporale dei processi considerati è molto maggiore del tempo di rilassamento di Maxwell, la litosfera inferiore e il mantello superiore si deformano in modo duttile attraverso meccanismi di creep. Il creep rappresenta la deformazione permanente che avviene sotto stress costante e comprende diversi meccanismi fisici a livello microstrutturale.

La legge di flusso fondamentale per il creep diffusivo (Nabarro-Herring) in un policristallo è espressa dalla relazione:

$\dot{\varepsilon} = A_1 \, (D_0/d^2) \, (\sigma/\mu) \exp(-Q/RT)$

dove $\dot{\varepsilon}$ è il tasso di deformazione (strain rate), d è la dimensione media dei grani, D_0 è il coefficiente di diffusione del reticolo, μ è il modulo di taglio, Q è l'energia di attivazione, R è la costante universale dei gas (8,314 J mol^{-1} K^{-1}) e T è la temperatura assoluta. Il coefficiente A_1 è un fattore geometrico adimensionale dell'ordine di 10-40.

Questa legge mostra una dipendenza lineare dallo stress (n = 1, dove n è l'esponente di stress) e una forte dipendenza inversa dal quadrato della dimensione dei grani. Il meccanismo fisico sottostante è la diffusione di vacanze dal bordo dei grani sottoposti a tensione compressiva verso quelli sottoposti a tensione, causando un allungamento netto del cristallo nella direzione dello stress applicato.

Per condizioni di stress più elevato, diventa dominante il creep per dislocazioni (dislocation creep), descritto dalla legge di potenza:

$\dot{\varepsilon} = A_2 \, \sigma^n \exp(-Q/RT)$

dove A_2 è un coefficiente dipendente dal materiale e n è l'esponente di stress, tipicamente compreso tra 3 e 5 per i silicati del mantello. Per l'olivina, che costituisce circa il 60% del mantello superiore, i parametri sperimentalmente determinati sono:

- n ≈ 3,5 per il creep di dislocazioni
- Q ≈ 540 kJ/mol per l'olivina secca
- Q ≈ 470 kJ/mol per l'olivina umida (con presenza di acqua strutturale)
- $A_2 \approx 10^5$ MPa^{-n} s^{-1} (variabile con il contenuto di acqua)

La dipendenza esponenziale dalla temperatura rende il creep estremamente sensibile al profilo termico della litosfera. Un aumento di temperatura di soli 100 K può incrementare il tasso di deformazione di un fattore 10-100, a seconda dell'energia di attivazione. Questa sensibilità termica spiega perché la litosfera oceanica, che è più fredda e sottile, è più resistente della litosfera continentale più calda e spessa.

La transizione tra il regime elastico superficiale e il regime viscoso profondo definisce la base meccanica della litosfera. Questa transizione non è netta ma graduale e dipende dal tasso di deformazione locale. Una definizione operativa comunemente utilizzata è quella di considerare la base della litosfera meccanica come l'isoterma dove la viscosità effettiva scende a circa 10^{21} Pa·s, che corrisponde approssimativamente a temperature di 1200-1300°C per il mantello olivinico.

1.4 Reologia Composita e Profili di Resistenza Litosferica

La litosfera reale è un sistema stratificato eterogeneo, composto da crosta superiore fragile, crosta inferiore duttile e mantello litosferico, ciascuno con proprietà reologiche distinte. Per quantificare la resistenza meccanica della litosfera in funzione della profondità, si costruiscono i cosiddetti "profili di resistenza" (yield strength envelopes), che rappresentano lo stress differenziale massimo che il materiale può sostenere a ogni profondità senza subire deformazione permanente.

Nella crosta superiore fragile, la resistenza è controllata dalla legge di Byerlee per l'attrito sulle faglie preesistenti. In regime estensionale, lo stress differenziale massimo $\sigma_1 - \sigma_3$ (dove σ_1 e σ_3 sono gli stress principali massimo e minimo) è dato da:

$\sigma_1 - \sigma_3 = (\mu \rho g z) / [(\mu^2+1)^{(1/2)} + \mu]$

dove μ è il coefficiente di attrito ($\mu \approx 0,6$-$0,85$ per la maggior parte delle rocce, secondo gli esperimenti di Byerlee), ρ è la densità media della roccia sovrastante (tipicamente 2700-3000 kg/m³ per la crosta), g è l'accelerazione di gravità (9,81 m/s²) e z è la profondità. In regime compressionale, la formula diventa:

$\sigma_1 - \sigma_3 = \mu \rho g z [(\mu^2+1)^{(1/2)} + \mu]$

che risulta in stress differenziali circa 3-4 volte maggiori rispetto al regime estensionale alla stessa profondità.

Per una crosta con densità media $\rho = 2800$ kg/m³ e $\mu = 0,75$, lo stress differenziale in regime estensionale a $z = 15$ km risulta:

$\sigma_1 - \sigma_3 = (0,75 \times 2800 \times 9,81 \times 15000) / [\sqrt{(0,75^2 + 1)} + 0,75] \approx 180$ MPa

Nella crosta inferiore e nel mantello litosferico, dove le temperature superano circa 300-400°C per rocce felsiche e 600-700°C per rocce mafiche e ultramafiche, la deformazione duttile per creep diventa il meccanismo dominante. Il profilo di resistenza in questo regime è controllato dalla legge di flusso per dislocazioni. Lo stress differenziale che produce un determinato tasso di deformazione $\dot{\varepsilon}$ è:

$\sigma = (\dot{\varepsilon}/A)^{(1/n)} \exp(Q/nRT)$

Assumendo un tasso di deformazione geologico rappresentativo di $\dot{\varepsilon} = 10^{-15}$ s^{-1} (corrispondente a circa 3% di deformazione per milione di anni, tipico dei processi tettonici), e utilizzando i parametri per una crosta felisca inferiore (quarzo):

- $A \approx 10^{-4}$ MPa^{-n} s^{-1}
- $n \approx 2,4$
- $Q \approx 135$ kJ/mol

Con un gradiente geotermico di 25 K/km (tipico di crosta continentale stabile), alla profondità di z = 30 km (temperatura T ≈ 750 + 273 = 1023 K, assumendo T_0 = 0°C in superficie), otteniamo:

$\sigma = (10^{-15} / 10^{-4})^{(1/2,4)} \exp(135000 / (2,4 \times 8,314 \times 1023)) \approx 45$ MPa

Questo valore è significativamente inferiore allo stress differenziale che la crosta superiore fragile può sostenere alla stessa profondità se estrapolato linearmente, dimostrando la transizione da comportamento fragile a duttile.

Il profilo di resistenza completo mostra tipicamente una forma "a sandwich" con due zone di alta resistenza (crosta superiore fragile e mantello litosferico superiore) separate da una zona di bassa resistenza (crosta inferiore duttile). Questo strato debole intermedio ha implicazioni fondamentali per la localizzazione della deformazione: permette il disaccoppiamento tra crosta e mantello e favorisce lo sviluppo di strutture tettoniche a pelle sottile (thin-skinned tectonics) dove la deformazione si concentra principalmente nella crosta superiore.

Per il mantello litosferico, utilizzando i parametri dell'olivina e assumendo un gradiente geotermico che diventa subadiabattico sotto la Moho (circa 0,5 K/km), lo stress differenziale alla base della litosfera (z ≈ 100 km, T ≈ 1400 K) con $\dot{\varepsilon} = 10^{-15}$ s^{-1} risulta:

$\sigma = (10^{-15} / 10^{5})^{(1/3,5)} \exp(540000 / (3,5 \times 8,314 \times 1400)) \approx 85$ MPa

La presenza di acqua strutturale riduce drasticamente questi valori, abbassando sia l'energia di attivazione sia aumentando il coefficiente pre-esponenziale A. Per olivina "umida" (con concentrazioni di $H/10^6$ Si ~ 1000 ppm):

$\sigma_{umida} \approx 0,1 \times \sigma_{secca}$

Questa riduzione ha conseguenze enormi per la resistenza effettiva della litosfera oceanica subducente, dove l'acqua rilasciata dalla disidratazione dei minerali idrati (serpentino, anfiboli, clorite) nella crosta oceanica alterata può migrare nel mantello sovrastante, indebolendolo significativamente.

1.5 Meccanismi di Faglia e Sismogenesi

La sismogenesi, ovvero il processo fisico di generazione dei terremoti, è intimamente legata alla meccanica delle faglie e alla transizione fragile-duttile. I terremoti rappresentano il rilascio improvviso di energia elastica accumulata nella litosfera attraverso la propagazione rapida di rotture lungo superfici di faglia preesistenti o di nuova formazione. La

comprensione quantitativa di questo processo richiede l'integrazione della meccanica della frattura, dell'attrito dinamico e della fisica dei materiali granulari.

1.5.1 Teoria dell'Elastic Rebound e Accumulo di Stress

La teoria fondamentale della sismogenesi fu formulata da H.F. Reid dopo il grande terremoto di San Francisco del 1906 e viene chiamata teoria dell'elastic rebound (rimbalzo elastico). Secondo questa teoria, le placche tettoniche si muovono in modo relativamente continuo e uniforme, ma lungo le faglie che le separano, l'attrito impedisce il movimento. Questo causa un accumulo graduale di deformazione elastica nelle rocce adiacenti alla faglia, fino a quando lo stress di taglio accumulato supera la resistenza all'attrito statico della faglia. A questo punto, si verifica un movimento improvviso (stick-slip), le rocce rilasciano l'energia elastica accumulata sotto forma di onde sismiche e la faglia scorre fino a quando lo stress di taglio non scende al di sotto della resistenza all'attrito dinamico.

Matematicamente, possiamo descrivere l'accumulo di stress lungo una faglia verticale strike-slip (trascorrente) in un mezzo elastico infinito utilizzando la soluzione di Savage e Burford (1973). Considerando un sistema di coordinate dove x è la distanza perpendicolare dalla faglia, y è parallelo alla direzione di scorrimento e z è la profondità, lo spostamento orizzontale v(x,t) in funzione del tempo t dovuto a un carico tettonico a tasso costante V alla profondità di locking D è:

$$v(x,t) = (V/\pi) [\arctan(x/D) - \arctan(x/(D+Vt/2))]$$

Per grandi tempi dopo l'ultimo evento sismico ($Vt << D$), questa espressione si semplifica in:

$$v(x,t) \approx (V/\pi) \arctan(x/D)$$

Il tasso di deformazione è massimo alla faglia ($x = 0$) e decade con la distanza secondo:

$$dv/dx = VD/(\pi(x^2 + D^2))$$

La profondità di locking D rappresenta la profondità fino alla quale la faglia è bloccata dall'attrito e accumula stress elasticamente. Sotto questa profondità, il movimento è aseismico e continuo (creep stabile). Per faglie mature come la San Andreas in California, $D \approx 15$-20 km, mentre $V \approx 35$ mm/anno.

Lo stress di taglio $\tau(z,t)$ accumulato sulla faglia in funzione della profondità e del tempo è dato da:

$$\tau(z,t) = \mu_rigidità \times (V \times t / D) \times f(z/D)$$

dove $\mu_rigidità$ è il modulo di taglio della roccia (tipicamente 30-40 GPa per la crosta) e $f(z/D)$ è una funzione che descrive la distribuzione verticale dello stress, che dipende dalla geometria della faglia e dalle condizioni al contorno. Per una faglia verticale in un semispazio elastico, $f(z/D) \approx 1$ per $z < D$ e decade rapidamente per $z > D$.

Il drop di stress $\Delta\tau$ associato a un terremoto è la differenza tra lo stress pre-sismico e post-sismico. Per un terremoto con momento sismico M_0 e area di rottura A, la relazione approssimata è:

$\Delta\tau \approx M_0 / (C \times A^{(3/2)})$

dove C è una costante geometrica dell'ordine di 10^6-10^7 (in unità SI). Per terremoti tipici, $\Delta\tau$ varia da pochi MPa per eventi piccoli a 10-20 MPa per grandi terremoti. È notevole che questo valore sia molto inferiore allo stress assoluto sulla faglia (che potrebbe essere dell'ordine di 100 MPa o più), implicando che solo una frazione dello stress totale viene rilasciata durante un terremoto.

1.5.2 Leggi di Attrito e Dinamica delle Faglie

Il comportamento delle faglie è governato dalle leggi di attrito a velocità-dipendente (rate-and-state friction laws), sviluppate attraverso esperimenti di laboratorio negli anni '70 e '80 da Dieterich, Ruina e collaboratori. La forma più comune di queste leggi è:

$\tau = \sigma_n [\mu_0 + a \ln(V/V_0) + b \ln(\theta V_0/D_c)]$

$d\theta/dt = 1 - (\theta V/D_c)$

dove τ è lo stress di taglio sulla faglia, σ_n è lo stress normale, μ_0 è il coefficiente di attrito di riferimento a velocità V_0, V è la velocità di scorrimento, θ è una variabile di stato che rappresenta "l'età" dei contatti asperità-asperità sulla superficie di faglia, D_c è la distanza caratteristica di scorrimento (tipicamente 10-100 μm in laboratorio, ma probabilmente mm-cm in natura), e a e b sono parametri adimensionali dipendenti dalla temperatura, pressione e composizione del materiale di faglia.

Il parametro critico è (a - b):

- Se (a - b) > 0: il comportamento è velocity-strengthening (rafforzamento con velocità), portando a creep stabile e aseismico
- Se (a - b) < 0: il comportamento è velocity-weakening (indebolimento con velocità), permettendo instabilità stick-slip e terremoti

Per la maggior parte delle rocce crostali, la transizione da velocity-weakening a velocity-strengthening avviene a temperature di circa 300-350°C per graniti e 450-550°C per gabbri, corrispondendo approssimativamente alla transizione fragile-duttile osservata geologicamente.

La lunghezza critica di nucleazione L_c, ovvero la dimensione minima di una perturbazione di stress necessaria per innescare un'instabilità sismica, è data da:

$L_c = \mu_rigidità\ D_c / (\sigma_n (b - a))$

Per valori tipici μ_rigidità = 30 GPa, D_c = 10 mm, σ_n = 100 MPa, (b - a) = 0,005, otteniamo:

$L_c = (30 \times 10^9 \times 0{,}01) / (100 \times 10^6 \times 0{,}005) = 600$ m

Questo implica che perturbazioni di stress su scale di centinaia di metri sono necessarie per nucleare un terremoto, coerente con osservazioni di processi di nucleazione precursori che durano ore o giorni prima di grandi terremoti.

1.5.3 Modelli di Ciclo Sismico

Il ciclo sismico completo lungo una faglia può essere schematizzato in diverse fasi:

1. **Fase inter-sismica** (durata: decenni a secoli): accumulo elastico di stress a tasso costante V. Lo stress di taglio cresce approssimativamente linearmente con il tempo:

τ(t) ≈ τ_dinamico + (μ_rigidità V / D) × t

dove τ_dinamico è lo stress residuo immediatamente dopo il terremoto precedente.

2. **Fase pre-sismica** (durata: ore a giorni): possibile accelerazione del creep aseismico in regioni velocity-strengthening adiacenti alla futura area di rottura. Il momento rilasciato aseismicamente M_aseismico(t) prima del mainshock può seguire una legge di accelerazione:

dM_aseismico/dt ∝ (t_mainshock - t)^(-p)

dove p ≈ 1-2 secondo modelli teorici e alcune osservazioni geodetiche.

3. **Fase co-sismica** (durata: secondi a minuti): propagazione della rottura a velocità V_r tipicamente 0,7-0,9 volte la velocità delle onde di taglio (V_s ≈ 3-4 km/s nella crosta). La velocità di propagazione è controllata dal bilancio energetico:

G = G_c + ∫ (τ_s - τ_d) dδ

dove G è il tasso di rilascio di energia elastica alla punta della frattura, G_c è l'energia di frattura specifica (energia per unità area necessaria per creare nuova superficie), τ_s e τ_d sono gli stress di taglio statico e dinamico, e δ è lo scorrimento sulla faglia.

4. **Fase post-sismica** (durata: giorni a anni): rilassamento attraverso afterslip su porzioni velocity-strengthening della faglia, rilassamento viscoelastico nella crosta inferiore e mantello superiore, e poroelasticità (diffusione di fluidi). Il momento rilasciato post-sismicamente tipicamente segue una legge logaritmica:

M_postseismic(t) ≈ M_0 × log(1 + t/t_c)

dove t_c è una costante di tempo caratteristica (giorni a settimane) e M_0 è il momento del mainshock.

Il tempo di ricorrenza T_r tra terremoti caratteristici sulla stessa faglia può essere stimato dalla relazione:

T_r ≈ Δu / V

dove Δu è lo scorrimento medio durante il terremoto. Per la faglia di San Andreas, con Δu ≈ 3-5 m e V ≈ 35 mm/anno:

T_r ≈ 4 m / (0,035 m/anno) ≈ 115 anni

Questo è in ragionevole accordo con i tempi di ricorrenza stimati paleosismologicamente per grandi terremoti di magnitudo M ≥ 7 lungo questo segmento.

1.5.4 Scaling Relations e Sismologia Quantitativa

Le relazioni di scala tra i parametri dei terremoti forniscono strumenti fondamentali per la valutazione della pericolosità sismica. Il momento sismico scalare M_0, che rappresenta una misura fisica dell'entità del terremoto indipendente dalla saturazione, è definito come:

$M_0 = \mu \times A \times \bar{u}$

dove μ è il modulo di rigidità (30 GPa tipico per la crosta), A è l'area della superficie di rottura e $\bar{u}$ è lo scorrimento medio sulla faglia. M_0 si misura in N·m.

La relazione tra momento sismico M_0 e magnitudo momento M_w è:

$M_w = (2/3) \log_{10}(M_0) - 6,07$

dove M_0 è espresso in N·m. Questa relazione implica che un aumento di un'unità di magnitudo corrisponde a un aumento del momento sismico di un fattore 10^(3/2) ≈ 31,6.

Le relazioni empiriche di Wells e Coppersmith (1994) collegano la magnitudo momento alle dimensioni della rottura. Per faglie strike-slip:

$\log_{10}(L) = -2,57 + 0,62\ M_w$ $\log_{10}(A) = -3,42 + 0,90\ M_w$ $\log_{10}(\bar{u}) = -4,80 + 0,69\ M_w$

dove L è la lunghezza di rottura in km, A l'area in km² e $\bar{u}$ lo scorrimento medio in m.

Per un terremoto di M_w = 7,0:

L = 10^(-2,57 + 0,62×7,0) = 10^1,77 ≈ 59 km A = 10^(-3,42 + 0,90×7,0) = 10^2,88 ≈ 760 km² $\bar{u}$ = 10^(-4,80 + 0,69×7,0) = 10^0,03 ≈ 1,07 m

L'energia sismica E_s rilasciata è correlata al momento sismico dalla relazione approssimata:

$E_s \approx M_0 / (2\mu) \times \Delta\tau$

Assumendo $\Delta\tau \approx 3$-10 MPa, per un evento M_w = 7,0 ($M_0 \approx 2 \times 10^{19}$ N·m):

$E_s \approx (2 \times 10^{19}) / (2 \times 3 \times 10^{10}) \times 5 \times 10^6 \approx 1,7 \times 10^{15}$ J ≈ 0,4 Megaton TNT

Solo una frazione dell'energia totale viene radiata come onde sismiche (efficienza sismica $\eta \approx 0,01$-0,10), il resto viene dissipata come calore attrito sulla faglia e nella formazione di nuove superfici di frattura.

La distribuzione dei terremoti in funzione della magnitudo segue la famosa relazione di Gutenberg-Richter:

$\log_{10}(N) = a - b\ M$

dove N è il numero di terremoti con magnitudo ≥ M in un dato intervallo di tempo e regione, a è una costante che dipende dal volume considerato e dal periodo di osservazione, e b è il cosiddetto "b-value", tipicamente b ≈ 1,0 ± 0,2 per regioni tettonicamente attive. Un b-value più basso (b < 1) indica una proporzione relativamente maggiore di eventi grandi, spesso associata a zone con stress elevato o faglie mature. Un b-value più alto (b > 1) è tipico di sciami sismici, vulcani, o zone con stress eterogeneo.

La legge di Gutenberg-Richter implica che per ogni terremoto di magnitudo M, ci sono circa 10^b ≈ 10 terremoti di magnitudo M-1. Questo comportamento scale-invariant suggerisce una natura frattale della distribuzione delle faglie e dei processi di rottura nella crosta terrestre.

1.6 Isostasia e Flessura Litosferica

Il concetto di isostasia, derivato dal greco "isos" (uguale) e "stasis" (equilibrio), descrive lo stato di equilibrio gravitazionale della litosfera che galleggia sul mantello astenosferico sottostante, più denso ma reologicamente deformabile su scale temporali geologiche. La teoria isostatica è fondamentale per comprendere la topografia terrestre, la struttura profonda delle catene montuose, l'evoluzione dei bacini sedimentari e i processi di adattamento verticale della litosfera a carichi superficiali variabili.

1.6.1 Modelli Isostatici Fondamentali

Esistono due modelli isostatici classici che rappresentano estremi concettuali: il modello di Airy e il modello di Pratt. Nel modello di Airy (1855), la topografia è compensata da variazioni nello spessore della crosta, che ha densità uniforme. Per una crosta con densità ρ_c che galleggia su un mantello di densità ρ_m, l'equilibrio isostatico richiede che la pressione alla profondità di compensazione sia uguale per tutte le colonne verticali.

Per una montagna di elevazione h sopra il livello di riferimento, con radice crostale di profondità r, l'equilibrio isostatico di Airy dà:

ρ_c × (h + r) = ρ_m × r

Risolvendo per r:

r = h × ρ_c / (ρ_m - ρ_c)

Con valori tipici ρ_c = 2850 kg/m³ per crosta continentale e ρ_m = 3300 kg/m³ per il mantello:

r = h × 2850 / (3300 - 2850) = h × 2850/450 ≈ 6,3 h

Questo significa che per ogni kilometro di elevazione topografica, esiste una radice crostale di circa 6,3 km. Per l'Himalaya con elevazione media h ≈ 5 km, la radice crostale prevista è r ≈ 31,5 km, portando a uno spessore crostale totale di circa 36,5 km sotto le pianure adiacenti più 31,5 km di radice ≈ 68 km, in eccellente accordo con le osservazioni sismologiche che indicano spessori crostali di 65-75 km sotto il Tibet e l'Himalaya.

Nel modello di Pratt (1855), invece, la topografia è compensata da variazioni laterali di densità crostale, con la base della crosta a profondità uniforme. Per una colonna con elevazione h e densità ρ(h), l'equilibrio richiede:

$$\rho(h) \times (D + h) = \rho_0 \times D$$

dove D è la profondità di compensazione e ρ_0 è la densità di riferimento per elevazione zero. Risolvendo:

$$\rho(h) = \rho_0 \times D / (D + h)$$

Per h = 3 km, D = 100 km, ρ_0 = 2850 kg/m³:

$$\rho(3\ km) = 2850 \times 100 / 103 \approx 2767\ kg/m^3$$

Questo modello è più appropriato per alcune situazioni specifiche, come le dorsali oceaniche dove la litosfera giovane e calda ha densità inferiore rispetto alla litosfera vecchia e fredda, o per spiegare altipiani con crosta di composizione anomala.

1.6.2 Teoria della Flessura Elastica

La teoria della flessura rappresenta un raffinamento rispetto ai modelli isostatici semplici, riconoscendo che la litosfera possiede rigidità finita e può sostenere differenze di carico su scale orizzontali limitate senza compensazione isostatica completa. Questo è particolarmente rilevante per carichi topografici con lunghezze d'onda inferiori a circa 100-200 km.

L'equazione fondamentale per la flessura di una piastra elastica sottile caricata su un fluido denso è derivata dall'equilibrio dei momenti flettenti e delle forze verticali. Per una piastra di spessore elastico effettivo T_e, modulo di Young E e coefficiente di Poisson v, soggetta a un carico verticale q(x) e galleggiante su un mantello con densità ρ_m, l'equazione di governo è:

$$D \times d^4w/dx^4 + (\rho_m - \rho_c)\, g\, w = q(x)$$

dove w(x) è la deflessione verticale della piastra (positiva verso il basso), x è la coordinata orizzontale, e D è la rigidità flessionale data da:

$$D = E\, T_e^3 / (12(1 - v^2))$$

Con E ≈ 100 GPa e v ≈ 0,25 per la litosfera:

$$D = 100 \times 10^9 \times T_e^3 / (12 \times (1 - 0{,}0625)) = 8{,}9 \times 10^9\ T_e^3\ N{\cdot}m$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale del quarto ordine può essere espressa in termini di funzioni esponenziali complesse o, più convenientemente, utilizzando la lunghezza d'onda caratteristica di flessura α, definita come:

$$\alpha = [4D / ((\rho_m - \rho_c)g)]^{(1/4)}$$

Per carico puntuale P applicato a x = 0, la soluzione è:

$$w(x) = (P\,\alpha) / (8\,D) \times \exp(-|x|/\alpha) \times [\cos(|x|/\alpha) + \sin(|x|/\alpha)]$$

Questa soluzione mostra un comportamento oscillante smorzato con lunghezza di decadimento caratteristica α. Per T_e = 25 km:

$$D = 8{,}9 \times 10^{9} \times (25000)^{3} \approx 1{,}4 \times 10^{23}\ \text{N·m}$$

$$\alpha = [4 \times 1{,}4 \times 10^{23} / (450 \times 9{,}81)]^{(1/4)} \approx 95\ \text{km}$$

Questo significa che per una litosfera con spessore elastico di 25 km, la deflessione dovuta a un carico si estende orizzontalmente per diverse centinaia di chilometri prima di decadere.

Il concetto di spessore elastico effettivo T_e è fondamentale ma sottile. T_e non corrisponde necessariamente allo spessore fisico della litosfera, ma rappresenta lo spessore di una piastra elastica omogenea che produrrebbe la stessa risposta flessionale della litosfera reale, che è stratificata e reologicamente complessa. Valori di T_e derivati da osservazioni geologiche e geofisiche variano notevolmente:

- Litosfera oceanica giovane (< 20 Ma): $T_e \approx$ 2-10 km
- Litosfera oceanica vecchia (> 80 Ma): $T_e \approx$ 25-40 km
- Crosta continentale giovane (Cenozoica): $T_e \approx$ 10-25 km
- Crosta continentale vecchia (Precambriana): $T_e \approx$ 40-100 km

Questa variabilità riflette differenze nell'età termica, nel flusso di calore, nello stress tettonico e nella storia deformativa.

1.6.3 Applicazioni: Bacini Sedimentari e Carico dei Ghiacciai

La teoria della flessura trova applicazione diretta nella modellazione della subsidenza dei bacini sedimentari foreland, che si formano adiacenti a catene montuose per carico topografico dell'orogene. Il carico topografico distribuito h(x) con densità ρ_t produce un carico verticale:

$$q(x) = \rho_t\, g\, h(x)$$

Per una catena montuosa approssimata come un carico rettangolare di larghezza L e altezza H:

$$q(x) = \rho_t\, g\, H \text{ per } 0 < x < L \quad q(x) = 0 \text{ altrove}$$

La deflessione risultante mostra un'ampia depressione (foreland basin) che si estende ben oltre il margine del carico, con profondità massima immediatamente adiacente al carico. Per L >> α, la profondità massima del bacino w_{max} è approssimativamente:

$$w_{max} \approx (\rho_t\, H) / (\rho_m - \rho_{sedimenti})$$

Considerando che i sedimenti riempiono il bacino durante la sua formazione, l'equazione deve essere modificata per tenere conto del carico dei sedimenti stessi, portando a un'equazione auto-consistente che richiede soluzione iterativa.

Un'altra applicazione importante è il rimbalzo post-glaciale (glacial isostatic adjustment, GIA), ovvero il sollevamento verticale della litosfera in risposta alla rimozione del peso delle calotte glaciali dopo l'ultimo massimo glaciale (circa 21.000 anni fa). La Fennoscandia, che era coperta da una calotta di ghiaccio spessa fino a 3 km, sta ancora sollevandosi a tassi fino a 10 mm/anno, fornendo informazioni preziose sulla viscosità del mantello.

Il modello di rimbalzo post-glaciale include sia la risposta elastica istantanea della litosfera alla rimozione del carico sia il rilassamento viscoelastico del mantello sottostante. La soluzione richiede l'integrazione dell'equazione di flessura con un modello reologico del mantello. Per un mantello con viscosità η_m, il tempo caratteristico di rilassamento τ_r è:

$\tau_r \approx \eta_m / (\rho_m g \alpha)$

Con $\eta_m \approx 10^{21}$ Pa·s (mantello superiore) e $\alpha \approx 100$ km:

$\tau_r \approx 10^{21} / (3300 \times 9{,}81 \times 100000) \approx 3100$ s ≈ 10 ore

Questo sembra troppo breve, ma il tempo osservato per il GIA è di migliaia di anni. La discrepanza si risolve riconoscendo che il tempo caratteristico dipende fortemente dal numero d'onda del carico: carichi con lunghezze d'onda maggiori (come le calotte glaciali continentali) hanno tempi di rilassamento molto più lunghi. La corretta formula per carichi con numero d'onda k è:

$\tau(k) \approx 2\eta_m k / (\rho_m g)$

Per lunghezze d'onda $\lambda \approx 1000$ km ($k = 2\pi/\lambda \approx 6{,}3 \times 10^{-6}$ m^{-1}):

$\tau \approx (2 \times 10^{21} \times 6{,}3 \times 10^{-6}) / (3300 \times 9{,}81) \approx 390.000$ s $\approx 4{,}5$ anni

Valori più realistici di $\eta_m \approx 5 \times 10^{20}$ Pa·s per il mantello superiore sotto regioni post-glaciali portano a tempi di rilassamento di migliaia di anni, coerenti con le osservazioni.

1.6.4 Anomalie di Gravità e Isostasia

Le anomalie di gravità forniscono un potente strumento per testare i modelli isostatici e investigare la struttura profonda della litosfera. L'anomalia di gravità free-air Δg_{FA} rappresenta la deviazione della gravità osservata dalla gravità teorica per un ellissoide di riferimento, corretta solo per l'elevazione:

$\Delta g_{FA} = g_{osservato} - g_{teorico} + 0{,}3086\, h$ mGal

dove h è l'elevazione in metri e il fattore 0,3086 mGal/m rappresenta il gradiente verticale di gravità free-air.

Se la topografia fosse completamente compensata isostaticamente secondo il modello di Airy, l'anomalia free-air sarebbe zero ovunque. Le anomalie free-air osservate indicano

quindi deviazioni dall'equilibrio isostatico perfetto. Le catene montuose mostrano tipicamente anomalie free-air positive di 100-300 mGal, indicando un eccesso di massa (compensazione incompleta o presenza di materiale denso in profondità).

L'anomalia di Bouguer Δg_B include una correzione aggiuntiva per l'attrazione gravitazionale della topografia, approssimata come una lastra infinita di spessore h e densità ρ_t:

$$\Delta g_B = \Delta g_{FA} - 2\pi G \rho_t h = \Delta g_{FA} - 0{,}04191 \rho_t h \text{ mGal}$$

dove $G = 6{,}674 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻² è la costante gravitazionale universale e ρ_t è in kg/m³.

Per un modello di Airy perfettamente compensato, l'anomalia di Bouguer dovrebbe essere fortemente negativa sotto le montagne a causa della radice crostale a bassa densità. Le anomalie di Bouguer osservate sotto le catene montuose sono infatti negative (tipicamente -200 a -500 mGal), ma meno negative di quanto previsto dal modello di Airy semplice, suggerendo contributi da variazioni di densità nel mantello o supporto dinamico parziale.

La relazione quantitativa tra anomalia di Bouguer e radice crostale per il modello di Airy è:

$$\Delta g_B \approx -2\pi G (\rho_m - \rho_c) r$$

Con $r = 6{,}3\, h$ e $(\rho_m - \rho_c) = 450$ kg/m³:

$$\Delta g_B \approx -2\pi \times 6{,}674 \times 10^{-11} \times 450 \times 6{,}3\, h \approx -1{,}19 \times 10^{-7}\, h \text{ m/s}^2$$

Convertendo in mGal (1 mGal = 10^{-5} m/s²) e h in metri:

$$\Delta g_B \approx -0{,}119\, h \text{ mGal (con h in metri)}$$

Per h = 3000 m:

$$\Delta g_B \approx -357 \text{ mGal}$$

Questo è coerente con le osservazioni sotto molte catene montuose, validando il modello di Airy come approssimazione di primo ordine.

1.7 Geodesia Spaziale e Deformazioni Crostali

La rivoluzione nella geodesia spaziale degli ultimi tre decenni ha trasformato la nostra capacità di misurare i movimenti della superficie terrestre con precisione millimetrica, aprendo nuove prospettive per lo studio della tettonica attiva, del ciclo sismico e dei processi di deformazione crostale. Le tecniche principali includono il Global Positioning System (GPS), l'interferometria radar satellitare (InSAR) e la telemetria laser satellitare (SLR).

1.7.1 Geodesia GPS e Campo di Velocità Crostale

Il GPS permette la determinazione precisa delle coordinate tridimensionali di stazioni geodetiche attraverso la misurazione del tempo di arrivo di segnali radio trasmessi da una

costellazione di satelliti in orbita. Con osservazioni ripetute nel tempo, si possono determinare i vettori di velocità delle stazioni con precisioni di ±0,5-2 mm/anno per le componenti orizzontali e ±2-5 mm/anno per la componente verticale.

Il campo di velocità osservato v(x,y) contiene informazioni sul tasso di deformazione della crosta. Il tensore di deformazione $\dot{\varepsilon}$ è derivato dal gradiente spaziale del campo di velocità:

$\dot{\varepsilon}_{ij} = (1/2) (\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$

In due dimensioni (considerando solo movimenti orizzontali), il tensore di strain rate ha componenti:

$\dot{\varepsilon}_{xx} = \partial v_x/\partial x \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = \partial v_y/\partial y \quad \dot{\varepsilon}_{xy} = (1/2) (\partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x)$

Gli invarianti del tensore forniscono informazioni cinematiche importanti:

- Dilatazione areale: $\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} = \mathrm{div}(v)$
- Massimo shear strain rate: $\dot{\gamma}_{max} = [(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy})^2 + 4\dot{\varepsilon}_{xy}^2]^{(1/2)}$

Per la regione della California centrale, le osservazioni GPS mostrano:

- Velocità relativa attraverso la faglia di San Andreas: ≈ 35-40 mm/anno
- Larghezza della zona di deformazione: ≈ 50-100 km
- Shear strain rate medio: $\dot{\gamma} \approx$ (40 mm/anno) / (75 km) $\approx 5{,}3 \times 10^{-7}$ anno^{-1} $\approx 1{,}7 \times 10^{-14}$ s^{-1}

Questo tasso di deformazione è comparabile al tasso assunto nei calcoli reologici per la litosfera duttile, validando i modelli di flusso viscoso discussi precedentemente.

1.7.2 Interferometria SAR (InSAR)

L'InSAR sfrutta le differenze di fase tra immagini radar acquisite dalla stessa orbita satellitare in tempi diversi per misurare cambiamenti submillimetrici nella distanza satellite-superficie terrestre. La fase interferometrica $\Delta\varphi$ è correlata allo spostamento del terreno lungo la linea di vista (LOS) del satellite Δr mediante:

$\Delta\varphi = (4\pi/\lambda) \Delta r$

dove λ è la lunghezza d'onda del radar (tipicamente $\lambda \approx 5{,}6$ cm per banda C, come il satellite Sentinel-1).

Uno spostamento $\Delta r = 1$ cm lungo la LOS produce:

$\Delta\varphi = (4\pi / 0{,}056) \times 0{,}01 \approx 2{,}24$ radianti $\approx 0{,}36$ cicli

Poiché la fase può essere misurata con precisioni di ±0,01 cicli in condizioni ottimali, la sensibilità teorica è dell'ordine di $\lambda/400 \approx 0{,}14$ mm. In pratica, decorrelazione temporale, errori atmosferici e rumore orbitale limitano la precisione a 5-10 mm per singoli interferogrammi, ma tecniche di analisi multitemporale (Persistent Scatterer InSAR, PS-InSAR) possono raggiungere precisioni di 1-2 mm/anno nei tassi di deformazione.

L'InSAR ha rivoluzionato lo studio della deformazione co-sismica e post-sismica. Per il terremoto di Landers (California, 1992, M_w 7,3), l'InSAR ha rivelato un campo di spostamento complesso con massimi di circa 2-3 m vicino alla rottura superficiale. Modellando questi dati con soluzioni di dislocazione elastica, si può invertire per i parametri di faglia (geometria, profondità, scorrimento).

Per una faglia verticale strike-slip semi-infinita in un semispazio elastico, lo spostamento orizzontale u parallelo alla faglia a distanza perpendicolare x dalla faglia è dato dalla soluzione di Steketee:

$$u(x) = (\Delta u/\pi) \arctan(x/d)$$

dove Δu è lo scorrimento sulla faglia e d è la profondità di nucleazione. Lo spostamento verticale per una faglia con immersione δ è:

$$w(x) = (\Delta u/\pi) \times \sin(\delta) \times \ln[(x^2 + d^2)^{(1/2)} / |x|]$$

Questi modelli, sebbene semplificati, permettono la stima rapida dei parametri di prima approssimazione. Modelli più sofisticati utilizzano elementi finiti o di boundary per tenere conto della topografia, stratificazione elastica e geometrie di faglia complesse.

1.7.3 Applicazione: Deformazione Inter-sismica e Carico Tettonico

Le misure geodetiche continue permettono di quantificare il carico tettonico accumulato durante il ciclo sismico inter-sismico e di valutare il deficit di scorrimento (slip deficit) sulle faglie bloccate. Il deficit di scorrimento cumulativo D(t) al tempo t dopo l'ultimo grande terremoto è:

$$D(t) = V \times t - u_{aseismic}(t)$$

dove V è il tasso di carico tettonico a lungo termine e $u_{aseismic}(t)$ è lo scorrimento aseismico accumulato (creep superficiale).

Per una faglia idealmente bloccata dalla superficie fino alla profondità D, il deficit di scorrimento si accumula uniformemente:

$$D(t) = V \times t \text{ per } 0 < z < D$$

Questo deficit verrà rilasciato durante il prossimo grande terremoto. Il momento sismico potenziale $M_{potenziale}$ accumulato dopo tempo t è:

$$M_{potenziale} = \mu \times L \times D \times V \times t$$

dove L è la lunghezza della faglia. Per la faglia di San Andreas meridionale (L ≈ 300 km, D ≈ 15 km, V ≈ 35 mm/anno, μ = 30 GPa), dopo t = 300 anni dall'ultimo evento maggiore (1680 circa):

$$M_{potenziale} = 3 \times 10^{10} \times 300000 \times 15000 \times 0{,}035 \times 300 \approx 1{,}4 \times 10^{20} \text{ N·m}$$

Questo corrisponde a un terremoto di magnitudo:

$M_w = (2/3) \log_{10}(1{,}4 \times 10^{20}) - 6{,}07 \approx (2/3) \times 20{,}15 - 6{,}07 \approx 7{,}36$

Questo calcolo suggerisce che la faglia di San Andreas meridionale ha accumulato sufficiente momento per un terremoto di $M_w \approx 7{,}3$-$7{,}5$, coerente con le stime probabilistiche di pericolosità sismica per questa regione.

I dati GPS mostrano che la deformazione inter-sismica non è confinata alla faglia principale ma è distribuita su una zona di larghezza finita (50-100 km), riflettendo la struttura reologica stratificata della litosfera con crosta inferiore duttile che scorre continuamente sotto la crosta superiore fragile bloccata. Modelli cinematici che incorporano questa stratificazione reologica forniscono stime più accurate della distribuzione dello stress e del potenziale sismico.

Struttura Interna della Terra e Discontinuità Sismiche

2.1 Introduzione alla Sismologia Profonda

La conoscenza della struttura interna della Terra deriva principalmente dall'analisi della propagazione delle onde sismiche generate da terremoti e registrate da reti sismografiche globali. Le onde sismiche, comportandosi secondo i principi dell'elastodinamica, subiscono riflessioni, rifrazioni e conversioni di modo quando attraversano interfacce che separano regioni con proprietà elastiche differenti. L'analisi sistematica dei tempi di arrivo, delle ampiezze e delle forme d'onda delle fasi sismiche ha permesso di costruire modelli sempre più dettagliati della distribuzione radiale e laterale delle velocità sismiche, della densità e dell'anisotropia all'interno del pianeta.

La Terra può essere suddivisa in gusci concentrici principali: la crosta (spessore 5-70 km), il mantello superiore (fino a 660 km di profondità), il mantello inferiore (660-2890 km), il nucleo esterno liquido (2890-5150 km) e il nucleo interno solido (5150-6371 km). Queste divisioni sono definite da discontinuità sismiche, ovvero superfici dove le velocità delle onde sismiche cambiano abruptamente a causa di transizioni di fase mineralogiche, cambiamenti chimici o transizioni nello stato fisico della materia.

2.2 Equazioni Fondamentali della Propagazione Sismica

La propagazione delle onde elastiche in un mezzo continuo è governata dall'equazione del moto di Navier-Cauchy, che può essere derivata dalla seconda legge di Newton applicata a un elemento di volume infinitesimo. Per un mezzo elastico isotropo, l'equazione assume la forma:

$$\rho \, \partial^2 u/\partial t^2 = (\lambda + \mu) \, \nabla(\nabla \cdot u) + \mu \, \nabla^2 u + f$$

dove u(x,t) è il vettore di spostamento, ρ è la densità, λ e μ sono i parametri elastici di Lamé, e f rappresenta le forze di volume (tipicamente zero lontano dalla sorgente sismica). Utilizzando l'identità vettoriale $\nabla^2 u = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \times (\nabla \times u)$, questa equazione può essere riscritta come:

$$\rho \, \partial^2 u/\partial t^2 = (\lambda + 2\mu) \, \nabla(\nabla \cdot u) - \mu \, \nabla \times (\nabla \times u)$$

Questa forma evidenzia il disaccoppiamento tra la componente dilatazionale (associata alla divergenza $\nabla \cdot u$) e la componente rotazionale (associata al rotore $\nabla \times u$) del campo di spostamento.

Applicando la decomposizione di Helmholtz, possiamo esprimere il campo di spostamento come:

$$u = \nabla \varphi + \nabla \times \psi$$

dove φ è il potenziale scalare e ψ è il potenziale vettoriale. Sostituendo nell'equazione del moto e separando le parti dilatazionali da quelle rotazionali, otteniamo due equazioni d'onda disaccopiate:

$$\partial^2 \varphi/\partial t^2 = \alpha^2 \, \nabla^2 \varphi \quad \partial^2 \psi/\partial t^2 = \beta^2 \, \nabla^2 \psi$$

dove α e β sono rispettivamente le velocità delle onde compressionalì (onde P) e delle onde di taglio (onde S):

$$\alpha = \sqrt{[(\lambda + 2\mu)/\rho]} = \sqrt{[K + (4/3)\mu]/\rho} \quad \beta = \sqrt{(\mu/\rho)}$$

Qui $K = \lambda + (2/3)\mu$ è il modulo di incomprimibilità (bulk modulus). Il rapporto tra le due velocità è:

$$\alpha/\beta = \sqrt{[(\lambda + 2\mu)/\mu]} = \sqrt{[2(1-\nu)/(1-2\nu)]}$$

dove $\nu = \lambda/[2(\lambda+\mu)]$ è il coefficiente di Poisson. Per la maggior parte delle rocce, $\nu \approx 0{,}25$, il che implica:

$$\alpha/\beta \approx \sqrt{[2(0{,}75)/0{,}5]} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

Questo rapporto teorico è notevolmente vicino ai valori osservati per la crosta e il mantello ($\alpha/\beta \approx 1{,}70$-$1{,}80$), confermando la validità del modello elastico isotropo come prima approssimazione.

2.3 La Discontinuità di Mohorovičić

La discontinuità di Mohorovičić, universalmente abbreviata come Moho, rappresenta il confine tra la crosta e il mantello ed è caratterizzata da un aumento repentino delle velocità sismiche. Questa discontinuità fu scoperta nel 1909 dal sismologo croato Andrija Mohorovičić attraverso l'analisi dei sismogrammi del terremoto di Pokuplje dell'8 ottobre 1909.

Mohorovičić osservò che le stazioni sismiche a distanze epicentrali inferiori a circa 200 km registravano le onde P dirette come primi arrivi, mentre stazioni più distanti registravano prima le onde rifratte criticamente attraverso uno strato sottostante più veloce. Questo pattern è spiegato dal fatto che, sebbene le onde rifratte debbano percorrere una distanza maggiore, viaggiano a velocità superiore nello strato profondo, compensando il percorso extra per distanze sufficientemente grandi.

La teoria della rifrazione sismica si basa sulla legge di Snell, che per incidenza su un'interfaccia orizzontale che separa uno strato con velocità v_1 da uno strato sottostante con velocità $v_2 > v_1$ può essere scritta come:

$$\sin(i_1)/v_1 = \sin(i_2)/v_2 = p$$

dove i_1 e i_2 sono gli angoli di incidenza e rifrazione rispetto alla normale, e p è il parametro del raggio (ray parameter), misurato in s/km. Per un'onda che viaggia orizzontalmente lungo l'interfaccia (onda testa o head wave), l'angolo di rifrazione è $i_2 = 90°$, il che richiede un angolo di incidenza critico i_c tale che:

$$\sin(i_c) = v_1/v_2$$

Il tempo di percorrenza totale T per un'onda rifratta criticamente che percorre una distanza epicentrale x è:

$$T = (2h/v_1) \cos(i_c) + x/v_2 = (2h/v_1) \sqrt{[1 - (v_1/v_2)^2]} + x/v_2$$

dove h è la profondità della discontinuità. Riarrangiando:

$$T = x/v_2 + 2h \sqrt{[(v_2^2 - v_1^2)/(v_1 v_2^2)]}$$

Questa è l'equazione di una retta nel piano tempo-distanza con pendenza $1/v_2$ e intercetta temporale T_0:

$$T_0 = 2h \sqrt{[(v_2^2 - v_1^2)/(v_1 v_2^2)]} = (2h/v_1) \sqrt{[1 - (v_1/v_2)^2]}$$

Da misure di T_0 e delle pendenze, Mohorovičić determinò che:

- Velocità crostale delle onde P: $v_1 \approx 5{,}6$-$6{,}0$ km/s
- Velocità mantellica delle onde P: $v_2 \approx 7{,}8$-$8{,}1$ km/s
- Profondità della Moho nella regione studiata: $h \approx 54$ km

Per la crosta oceanica, la Moho è molto più superficiale ($h \approx 6$-7 km sotto il fondale oceanico) e il contrasto di velocità è simile:

- Velocità crostale (gabbri): $v_1 \approx 6{,}7$-$7{,}0$ km/s
- Velocità mantellica (peridotiti): $v_2 \approx 7{,}8$-$8{,}2$ km/s

Il salto di velocità alla Moho è principalmente dovuto al cambiamento nella composizione mineralogica: la crosta inferiore è composta prevalentemente da plagioclasio, pirosseni e anfiboli in rocce gabbriche o granuliliche, mentre il mantello superiore è dominato da olivina ($(Mg,Fe)_2SiO_4$) e pirosseni ortorombici (enstatite, $MgSiO_3$) in peridotiti.

Il modulo di incomprimibilità K e il modulo di taglio μ per l'olivina sono significativamente maggiori di quelli dei silicati crostali, principalmente a causa della maggiore densità di impacchettamento della struttura cristallina olivinica. Utilizzando i valori sperimentali:

Per plagioclasio (anortite, $CaAl_2Si_2O_8$):

- K ≈ 85 GPa, μ ≈ 38 GPa, ρ ≈ 2760 kg/m³
- $\alpha = \sqrt{[(85 + 4/3 \times 38)/2760 \times 10^9]} \approx 6400$ m/s

Per olivina (forsterite, Mg_2SiO_4):

- K ≈ 129 GPa, μ ≈ 81 GPa, ρ ≈ 3220 kg/m³
- $\alpha = \sqrt{[(129 + 4/3 \times 81)/3220 \times 10^9]} \approx 8200$ m/s

Questi calcoli mostrano un salto di velocità $\Delta\alpha \approx 1800$ m/s, coerente con le osservazioni sismologiche.

2.4 Le Discontinuità del Mantello di Transizione: 410 km e 660 km

Il mantello di transizione, compreso tra circa 410 km e 660 km di profondità, è caratterizzato da due discontinuità sismiche prominenti a 410 km e 660 km (le profondità variano leggermente con la posizione geografica a causa di eterogeneità termiche). Queste discontinuità non sono dovute a cambiamenti chimici ma a transizioni di fase mineralogiche indotte dall'aumento di pressione con la profondità.

2.4.1 La Discontinuità a 410 km

Alla profondità di circa 410 km, la pressione raggiunge circa 13,5 GPa e la temperatura è dell'ordine di 1600-1700 K. A queste condizioni, l'olivina (α-fase, con struttura cristallina ortorombica) subisce una transizione di fase a wadsleyite (β-fase, con struttura spinello modificata). Questa trasformazione è associata a un aumento di densità di circa 5-6% e un aumento delle velocità sismiche di circa 4-5%.

La transizione olivina → wadsleyite può essere rappresentata come:

$(Mg,Fe)_2SiO_4$ (olivina) → $(Mg,Fe)_2SiO_4$ (wadsleyite)

Dal punto di vista cristallografico, la transizione comporta una riorganizzazione della coordinazione del silicio e del magnesio/ferro. Nell'olivina, il silicio è in coordinazione tetraedrica (numero di coordinazione CN = 4), mentre nella wadsleyite una frazione del silicio passa a coordinazione ottaedrica (CN = 6), aumentando la densità di impacchettamento degli atomi.

La relazione di Clapeyron descrive la pendenza della curva di equilibrio di fase nel piano pressione-temperatura:

$dP/dT = \Delta S/\Delta V$

dove ΔS è la variazione di entropia e ΔV è la variazione di volume molare associata alla transizione. Utilizzando la relazione termodinamica ΔS = ΔH/T, dove ΔH è l'entalpia di transizione:

$dP/dT = \Delta H/(T\,\Delta V)$

Per la transizione olivina-wadsleyite, i parametri termodinamici sperimentali sono:

- $\Delta V \approx -0{,}8\ cm^3/mol \approx -0{,}8 \times 10^{-6}\ m^3/mol$ (negativo perché la fase ad alta pressione è più densa)
- $\Delta H \approx 25\ kJ/mol$ (endotermica)
- Pendenza di Clapeyron: $\gamma = dP/dT \approx +3\ MPa/K = +3 \times 10^6\ Pa/K$

Questa pendenza positiva implica che regioni fredde (come litosfera subducente) avranno la transizione a profondità leggermente minori, mentre regioni calde (come plume mantellici) l'avranno a profondità maggiori. L'ampiezza topografica della discontinuità Δz dovuta a un'anomalia termica ΔT è:

$\Delta z \approx (\gamma/\rho g)\,\Delta T$

Con $\rho \approx 3600\ kg/m^3$, $g \approx 10\ m/s^2$ alla profondità di 410 km:

$\Delta z \approx (3 \times 10^6)/(3600 \times 10) \times \Delta T = 83\,\Delta T$ metri/Kelvin

Per un'anomalia termica di $\Delta T = -200$ K (tipica di una litosfera subducente fredda):

$\Delta z \approx 83 \times (-200) = -16600\ m \approx -17\ km$

Quindi la discontinuità a 410 km dovrebbe essere sollevata di circa 17 km in zone di subduzione fredde. Queste variazioni topografiche sono effettivamente osservate attraverso l'analisi delle fasi sismiche convertite (onde P-to-S riflesse dalla discontinuità, indicate come P410s).

Le velocità delle onde sismiche aumentano attraverso la discontinuità a 410 km:

- Onde P: da $\alpha \approx 9{,}0$ km/s (olivina) a $\alpha \approx 9{,}5$ km/s (wadsleyite), $\Delta\alpha/\alpha \approx 5{,}5\%$
- Onde S: da $\beta \approx 4{,}9$ km/s a $\beta \approx 5{,}2$ km/s, $\Delta\beta/\beta \approx 6{,}1\%$

Questi valori sono coerenti con le misure petrophysics sperimentali ad alte pressioni. Il modulo di incomprimibilità e il modulo di taglio per wadsleyite sono:

- $K_{wadsleyite} \approx 170$ GPa (vs $K_{olivina} \approx 129$ GPa a 13 GPa)
- $\mu_{wadsleyite} \approx 112$ GPa (vs $\mu_{olivina} \approx 81$ GPa a 13 GPa)

2.4.2 La Discontinuità a 660 km

La discontinuità a 660 km è ancora più pronunciata e rappresenta il confine tra il mantello superiore e il mantello inferiore. A questa profondità, la pressione è circa 24 GPa e la temperatura circa 1900-2000 K. La principale transizione mineralogica è la dissociazione

della ringwoodite (γ-fase spinello, l'equivalente ad alta pressione della wadsleyite) in perovskite (bridgmanite, $(Mg,Fe)SiO_3$) e ferropericlasio ($(Mg,Fe)O$):

$(Mg,Fe)_2SiO_4$ (ringwoodite) → $(Mg,Fe)SiO_3$ (bridgmanite) + $(Mg,Fe)O$ (ferropericlasio)

Questa reazione è fortemente esotermica ($\Delta H \approx -40$ kJ/mol) e comporta una diminuzione di volume di circa 8-9%, causando un aumento drammatico della densità:

- Densità ringwoodite: $\rho \approx 3700$ kg/m³
- Densità assemblaggio perovskite+ferropericlasio: $\rho \approx 4050$ kg/m³
- $\Delta\rho/\rho \approx 9{,}5\%$

Le velocità sismiche aumentano ancora più marcatamente che alla discontinuità a 410 km:

- Onde P: da $\alpha \approx 10{,}2$ km/s a $\alpha \approx 10{,}8$ km/s, $\Delta\alpha/\alpha \approx 5{,}9\%$
- Onde S: da $\beta \approx 5{,}6$ km/s a $\beta \approx 5{,}9$ km/s, $\Delta\beta/\beta \approx 5{,}4\%$

La pendenza di Clapeyron per questa transizione è critica per la dinamica della convezione mantellica:

$\gamma_{660} \approx -2{,}5$ MPa/K (negativa!)

La pendenza negativa ha implicazioni opposte alla discontinuità a 410 km: regioni fredde (slabs subducenti) hanno la transizione a profondità maggiori, mentre regioni calde (plume) l'hanno a profondità minori. Questo crea una topografia della discontinuità:

$\Delta z_{660} \approx (\gamma_{660}/\rho g)\,\Delta T = (-2{,}5 \times 10^6)/(3900 \times 10) \times \Delta T \approx -64\,\Delta T$ m/K

Per $\Delta T = -300$ K:

$\Delta z_{660} \approx -64 \times (-300) = +19200$ m $\approx +19$ km

Quindi la discontinuità è depressa (più profonda) in zone fredde. La combinazione delle pendenze opposte a 410 e 660 km crea un ispessimento del mantello di transizione in zone di subduzione (la 410 si solleva, la 660 si abbassa) e un assottigliamento sotto plume caldi, fornendo una firma diagnostica per la tomografia sismica.

La questione se la discontinuità a 660 km agisca come una barriera parziale o totale alla convezione mantellica è stata oggetto di intenso dibattito. La pendenza negativa della transizione di fase tende a inibire il flusso verticale: materiale freddo che scende trova resistenza perché la transizione di fase assorbe calore latente (essendo esotermica, la transizione rilascia calore quando il materiale attraversa verso il basso, il che lo riscalda e riduce la sua anomalia di densità negativa). Viceversa, materiale caldo che sale viene ostacolato perché la transizione inversa è endotermica.

La forza di questa barriera può essere quantificata dal parametro adimensionale di Clapeyron Γ:

$\Gamma = (\gamma\,\Delta T_{interface}\,\alpha_{thermal}\,g\,d) / (\Delta S_{phase}\,c_p)$

dove $\Delta T_{interface}$ è il salto di temperatura attraverso il mantello di transizione, $\alpha_{thermal}$ è il coefficiente di espansione termica ($\alpha \approx 2\text{-}3 \times 10^{-5}$ K^{-1}), d è lo spessore del mantello di transizione (≈ 250 km), ΔS_{phase} è la variazione di entropia della transizione e c_p è la capacità termica a pressione costante.

Per $\Gamma < 0,3$, la barriera è debole e non impedisce significativamente la convezione attraverso la 660. Per $\Gamma > 1$, la barriera è forte e può separare parzialmente la convezione del mantello superiore da quella del mantello inferiore. Le stime attuali suggeriscono $\Gamma \approx 0,2\text{-}0,4$, implicando una barriera debole ma non trascurabile.

2.5 La Regione D'' e la Discontinuità Core-Mantle Boundary

La regione D'' (pronunciata "D doppio-primo") rappresenta gli ultimi 200-300 km del mantello inferiore sopra il nucleo esterno liquido ed è caratterizzata da complessità sismologica estrema, eterogeneità laterale pronunciata e possibili transizioni di fase addizionali.

2.5.1 Struttura e Composizione della D''

La discontinuità core-mantle boundary (CMB) a 2890 km di profondità rappresenta il contrasto fisico più drammatico all'interno della Terra: il mantello solido silicatico con densità $\rho \approx 5560$ kg/m³ passa abruptamente al nucleo esterno liquido metallico (lega ferro-nichel con elementi leggeri) con densità $\rho \approx 9900$ kg/m³. Questo salto di densità di quasi 80% è accompagnato da un crollo drammatico della velocità delle onde S:

- Mantello basale: $\beta \approx 7,3$ km/s
- Nucleo esterno: $\beta = 0$ (il fluido non può sostenere onde di taglio)

La velocità delle onde P invece diminuisce ma rimane finita:

- Mantello basale: $\alpha \approx 13,7$ km/s
- Nucleo esterno: $\alpha \approx 8,1$ km/s

Questo contrasto crea zone d'ombra per le onde sismiche. Le onde S dirette non possono penetrare nel nucleo esterno, creando una zona d'ombra per distanze epicentrali tra circa 105° e 180°. Le onde P vengono fortemente rifratte verso il basso quando entrano nel nucleo, creando una zona d'ombra per onde P dirette tra circa 103° e 143°.

Il tempo di percorrenza per le onde P che attraversano il nucleo (fasi PKP) mostra tre rami distinti nel grafico tempo-distanza (hodocrone), corrispondenti a raggi che penetrano a diverse profondità nel nucleo. Il ramo PKPab attraversa solo il nucleo esterno, PKPbc riflette dalla superficie del nucleo interno, e PKPdf attraversa il nucleo interno solido.

All'interno della regione D'', sono state identificate discontinuità sismiche locali e regionali che potrebbero essere associate a transizioni di fase della perovskite in post-perovskite (pPv), una fase ancora più densa con struttura cristallina $CaIrO_3$-type. La transizione bridgmanite → post-perovskite avviene a pressioni $P > 120$ GPa (presenti solo negli ultimi 200-300 km del mantello) e temperature $T > 2500$ K:

$(Mg,Fe)SiO_3$ (bridgmanite, struttura perovskite) → $(Mg,Fe)SiO_3$ (post-perovskite, struttura $CaIrO_3$)

Questa transizione ha una pendenza di Clapeyron fortemente positiva:

γ_pPv ≈ +7 MPa/K

Il che implica che regioni fredde (come le parti basali di slabs subdotte che raggiungono la CMB) stabiliranno la post-perovskite a quote maggiori sopra la CMB, mentre regioni calde (come le basi di superplume) potrebbero non avere affatto la transizione.

L'incremento di velocità sismica associato alla transizione è relativamente modesto:

- Δα/α ≈ 1-2%
- Δβ/β ≈ 2-3%

Ma questo è sufficiente per essere rilevato sismologicamente in regioni favorevoli. La post-perovskite ha anche anisotropia sismica intrinseca molto forte, con velocità delle onde S che differiscono fino al 15-20% a seconda della direzione di propagazione rispetto all'orientamento dei piani cristallografici.

2.5.2 Ultra-Low Velocity Zones (ULVZ)

Sparse lungo la CMB, specialmente sotto regioni con anomalie di velocità elevata nel mantello sovrastante (interpretate come materiale subdotto freddo), sono state identificate ultra-low velocity zones (ULVZ): sottili strati (5-40 km di spessore) con riduzioni drammatiche delle velocità sismiche:

- Δα/α ≈ -10% a -30%
- Δβ/β ≈ -10% a -50%

Questi valori estremi suggeriscono la presenza di fusione parziale o materiale chimicamente distinto. Le ipotesi includono:

1. Accumulo di materiale crostale oceanico subdotto, chimicamente distinto dal mantello peridotitico
2. Arricchimento in ferro dovuto a reazioni chimiche con il nucleo esterno
3. Fusione parziale indotta dal flusso di calore elevato proveniente dal nucleo (≈ 10-15 TW attraverso la CMB)

La densità delle ULVZ è difficile da vincolare direttamente dalle osservazioni sismologiche. Se le riduzioni di velocità fossero dovute solo a temperatura elevata, ci aspetteremmo una diminuzione di densità. Tuttavia, se sono dovute ad arricchimento in ferro, la densità potrebbe effettivamente essere maggiore del mantello circostante. Il trade-off temperatura-composizione è un problema fondamentale nella interpretazione delle ULVZ.

2.6 Il Nucleo: Esterno Liquido e Interno Solido

2.6.1 Il Nucleo Esterno

Il nucleo esterno, che si estende da 2890 km a 5150 km di profondità, è composto principalmente da ferro liquido con circa 5-10% di elementi leggeri (probabilmente ossigeno, zolfo, silicio, carbonio o idrogeno). La sua natura fluida è dimostrata dall'assenza di propagazione di onde S e dalla presenza di precessione libera del nucleo (free core nutation) osservata geodeticamente.

La temperatura alla sommità del nucleo esterno (alla CMB) è stimata essere circa 4000-4500 K, mentre alla base (Inner Core Boundary, ICB) è circa 5000-6000 K. Queste temperature sono ben al di sopra del punto di fusione del ferro puro a queste pressioni (che sarebbe circa 5000 K alla CMB e 6500 K all'ICB), ma la presenza di elementi leggeri abbassa il liquidus, mantenendo il nucleo esterno liquido.

Il profilo di velocità delle onde P nel nucleo esterno aumenta gradualmente con la profondità:

- Alla CMB (P ≈ 136 GPa): α ≈ 8,07 km/s
- All'ICB (P ≈ 330 GPa): α ≈ 10,36 km/s

Questo aumento è dovuto principalmente all'incremento del modulo di incomprimibilità con la pressione. La relazione empirica di Birch-Murnaghan del terzo ordine fornisce un modello per la variazione di densità e velocità con la pressione:

$$P = (3K_0/2) [(\rho/\rho_0)^{(7/3)} - (\rho/\rho_0)^{(5/3)}] \{1 + (3/4)(K'_0 - 4)[(\rho/\rho_0)^{(2/3)} - 1]\}$$

dove K_0 è il modulo di incomprimibilità a pressione zero, $K'_0 = dK/dP|_{P=0}$ è la sua derivata rispetto alla pressione, e ρ_0 è la densità a pressione zero.

Per il nucleo esterno, i parametri ottimali che riproducono le osservazioni sismologiche sono approssimativamente:

- $\rho_0 \approx 7200$ kg/m³
- $K_0 \approx 650$ GPa
- $K'_0 \approx 4,0$

La convezione termica nel nucleo esterno è il motore della geodinamo, il processo che genera il campo magnetico terrestre. Il numero di Rayleigh Ra caratterizza l'intensità della convezione:

$$Ra = (\alpha_{thermal} g \Delta T L^3) / (\kappa \nu)$$

dove $\alpha_{thermal}$ è il coefficiente di espansione termica ($\approx 1 \times 10^{-5}$ K⁻¹ per il nucleo), g è l'accelerazione di gravità media nel nucleo (≈ 7 m/s²), ΔT è la differenza di temperatura attraverso il nucleo esterno (≈ 1500 K), L è lo spessore del nucleo esterno (≈ 2260 km), κ è la diffusività termica ($\approx 10^{-5}$ m²/s) e ν è la viscosità cinematica ($\approx 10^{-6}$ m²/s per metallo liquido).

$$Ra = (10^{-5} \times 7 \times 1500 \times (2,26 \times 10^6)^3) / (10^{-5} \times 10^{-6})$$

$$Ra \approx 1,7 \times 10^{26}$$

Questo valore estremamente elevato (il valore critico per l'inizio della convezione è Ra_c ≈ 1000) indica che la convezione nel nucleo è estremamente vigorosa e turbolenta.

2.6.2 Il Nucleo Interno Solido

Il nucleo interno, con raggio di circa 1220 km, fu scoperto da Inge Lehmann nel 1936 attraverso l'identificazione della fase PKiKP (onde P che attraversano il mantello, riflettono dalla superficie del nucleo interno, e ritornano attraverso il mantello). La solidificazione del nucleo interno è dovuta al fatto che, nonostante l'aumento di temperatura con la profondità, l'aumento ancora più rapido della temperatura di fusione con la pressione (pendenza di Clapeyron del ferro di circa 40-50 K/GPa) fa sì che il materiale del nucleo attraversi il solidus.

Le velocità sismiche nel nucleo interno sono:

- Onde P: α ≈ 11,03 km/s al vertice dell'ICB, aumentando a α ≈ 11,26 km/s al centro
- Onde S: β ≈ 3,5 km/s (controverso, con alcune interpretazioni che suggeriscono β ≈ 0 se il nucleo interno fosse parzialmente fuso)

Una caratteristica straordinaria del nucleo interno è la sua anisotropia sismica: le onde P che si propagano parallelamente all'asse di rotazione terrestre viaggiano circa 3-4% più velocemente di quelle che si propagano nel piano equatoriale:

α_polare / α_equatoriale ≈ 1,03-1,04

Questa anisotropia è interpretata come dovuta all'allineamento preferenziale dei cristalli di ferro (probabilmente nella fase hexagonal close-packed, hcp, ε-Fe) sotto l'influenza del campo magnetico e/o dello stress di marea.

Il nucleo interno cresce per solidificazione alla ICB a un tasso stimato di circa 1 mm/anno. Il rilascio di calore latente e l'espulsione di elementi leggeri durante la cristallizzazione forniscono energia aggiuntiva per guidare la convezione composizionale nel nucleo esterno, che è essenziale per sostenere la geodinamo.

2.6.3 Super-Rotazione del Nucleo Interno

Analisi di forme d'onda sismiche ripetute (doppietti sismici, ovvero terremoti che si verificano quasi nello stesso luogo ma a distanza di anni) hanno suggerito che il nucleo interno potrebbe ruotare più velocemente della Terra nel suo insieme (super-rotazione). Le stime iniziali indicavano una rotazione differenziale di circa 0,2-3 gradi per anno verso est rispetto al mantello.

La super-rotazione sarebbe causata dalla coppia elettromagnetica esercitata dal campo magnetico generato nel nucleo esterno. Il momento angolare L del nucleo interno (massa M ≈ 10^{23} kg, raggio R ≈ 1,22 × 10^{6} m, approssimabile come sfera solida) è:

$L = (2/5) M R^2 \omega$

dove ω è la velocità angolare. La coppia necessaria per accelerare il nucleo interno a super-rotazione di $\Delta\omega = 1^\circ$/anno ≈ $5{,}5 \times 10^{-10}$ rad/s in tempo scala geologica $t \approx 10^9$ anni è:

$$\tau = dL/dt = (2/5)\, M\, R^2\, \Delta\omega / t$$

$$\tau = (2/5) \times 10^{23} \times (1{,}22 \times 10^6)^2 \times 5{,}5 \times 10^{-10} / (10^9 \times 3{,}15 \times 10^7)$$

$$\tau \approx 10^{14}\ \text{N·m}$$

Questa coppia può essere fornita dalle correnti elettriche indotte nell'interfaccia nucleo interno-nucleo esterno dal campo magnetico, secondo studi magnetoidrodinamici.

Tuttavia, studi più recenti basati su dataset sismologici aggiornati e modelli più sofisticati hanno messo in dubbio l'esistenza della super-rotazione, suggerendo che le variazioni temporali osservate potrebbero essere dovute a cambiamenti nelle proprietà sismiche superficiali del nucleo interno piuttosto che a rotazione differenziale. Il dibattito rimane aperto.

2.7 Anisotropia Sismica e Flusso Mantellico

L'anisotropia sismica, ovvero la dipendenza direzionale delle velocità delle onde sismiche, fornisce informazioni critiche sulla deformazione e il flusso del mantello. In un mezzo anisotropo, la velocità delle onde dipende non solo dalla frequenza ma anche dalla direzione di propagazione e dalla polarizzazione.

Per un mezzo con anisotropia esagonale (simmetria transversalmente isotropa), che è una buona approssimazione per molte regioni del mantello dove i minerali sono orientati con i loro assi cristallografici paralleli, la relazione tra stress σ e deformazione ε è descritta da cinque costanti elastiche indipendenti C_{11}, C_{33}, C_{13}, C_{44}, e C_{66}:

La velocità delle onde P che si propagano parallelamente all'asse di simmetria (velocità verticale V_PV) e perpendicolare ad esso (velocità orizzontale V_PH) sono:

$$V_PV = \sqrt{(C_{33}/\rho)}\ V_PH = \sqrt{(C_{11}/\rho)}$$

Il parametro di anisotropia radiale ξ è definito come:

$$\xi = V_PH / V_PV = \sqrt{(C_{11}/C_{33})}$$

Nel mantello superiore sotto dorsali oceaniche e zone di estensione, l'olivina deformata sviluppa una fabric (tessitura cristallografica) dove l'asse cristallografico [100] (asse veloce per onde S) si allinea con la direzione di flusso. Questo produce anisotropia sismica con:

- Massima velocità onde S: direzione orizzontale parallela al flusso
- Minima velocità onde S: direzione verticale

La percentuale di anisotropia A_S per onde S è tipicamente:

$$A_S = 200 \times (V_S,max - V_S,min) / (V_S,max + V_S,min) \approx 2\text{-}8\%$$

Nella litosfera oceanica, l'anisotropia "congelata" registra l'orientamento del flusso al momento della formazione della litosfera alla dorsale, fornendo un paleomarker della direzione di spreading. Nella astenosfera sotto le placche in movimento, l'anisotropia riflette il flusso astenosferico attuale, che può differire dalla direzione del movimento della placca soprastante se c'è decoupling.

Le fasi SKS (onde S che attraversano il mantello, convertono a onde P nel nucleo esterno, e riconvertono a onde S uscendo dal nucleo) sono particolarmente utili per studiare l'anisotropia mantellica. Un'onda SKS che entra in una regione anisotropa si separa (splitting) in due onde S polarizzate ortogonalmente, viaggiando a velocità diverse:

$\Delta t = L \times (1/V_{slow} - 1/V_{fast})$

dove L è lo spessore dello strato anisotropo. Le misure di splitting SKS forniscono due parametri: la direzione di polarizzazione dell'onda veloce φ (che indica l'orientamento della fabric) e il tempo di ritardo Δt tra le due onde (che indica la forza dell'anisotropia integrata lungo il percorso).

Valori tipici osservati sono:

- φ: spesso parallelo alla direzione di movimento assoluto della placca (nel sistema di riferimento hot spot)
- Δt: 0,5-2,5 secondi

Per uno strato astenosferico di spessore L ≈ 100 km con anisotropia $A_S \approx 4\%$:

$V_{slow} \approx 4{,}4$ km/s, $V_{fast} \approx 4{,}6$ km/s

$\Delta t \approx 100 \times (1/4{,}4 - 1/4{,}6) \approx 100 \times (0{,}227 - 0{,}217) \approx 1{,}0$ s

Questo è in eccellente accordo con le osservazioni, confermando che l'anisotropia è principalmente localizzata nell'astenosfera superiore.

Nel mantello di transizione (410-660 km), l'anisotropia è generalmente debole (< 1-2%) perché i minerali dominanti (wadsleyite, ringwoodite) hanno simmetria cubica che intrinsecamente produce anisotropia ridotta anche quando orientati.

Nel mantello inferiore, l'anisotropia è di nuovo presente ma con pattern complessi. Vicino alla CMB, nella regione D'', l'anisotropia può essere forte (fino a 10% per onde S) e è probabilmente dovuta alla orientazione preferenziale della post-perovskite sotto stress di taglio indotto dal flusso mantellico sopra la topografia della CMB.

Geotermia e Flusso di Calore Terrestre

3.1 Introduzione al Bilancio Termico Terrestre

La Terra è un motore termico che dissipa continuamente l'energia accumulata durante la sua formazione e quella prodotta dal decadimento radioattivo degli elementi instabili contenuti

nel suo interno. Il flusso di calore dalla superficie terrestre verso lo spazio, misurato con precisione attraverso sonde termiche in pozzi profondi e carotaggi oceanici, rappresenta circa 46-47 TW (terawatt, 10^{12} watt), una quantità enorme se confrontata con il consumo energetico globale umano (circa 18 TW), ma minuscola rispetto alla potenza solare che raggiunge la Terra (circa 174.000 TW).

La comprensione del bilancio termico terrestre richiede la quantificazione di tre componenti principali:

1. **Calore primordiale**: energia termica residua dall'accrezione planetaria e dalla differenziazione core-mantello, stimata contribuire circa 20-30 TW
2. **Decadimento radioattivo**: energia prodotta dal decadimento di isotopi radioattivi a vita lunga (principalmente ^{238}U, ^{235}U, ^{232}Th e ^{40}K), contribuente circa 20-25 TW
3. **Calore latente**: energia rilasciata dalla cristallizzazione del nucleo interno, contribuente circa 2-3 TW

La distribuzione del flusso di calore superficiale non è uniforme ma mostra variazioni sistematiche correlate con l'età e il tipo di litosfera. Le dorsali medio-oceaniche e le zone di rift continentale mostrano flussi di calore elevati (tipicamente 100-300 mW/m²), mentre le regioni cratoniche vecchie e stabili hanno flussi bassi (tipicamente 40-60 mW/m²).

3.2 Equazione Fondamentale della Conduzione del Calore

Il trasporto del calore nella litosfera terrestre avviene principalmente per conduzione, mentre nel mantello astenosferico e più profondo la convezione diventa il meccanismo dominante. L'equazione che governa la conduzione termica in un mezzo continuo è l'equazione del calore, derivabile dal principio di conservazione dell'energia.

Per un elemento di volume infinitesimo, il bilancio energetico richiede che il tasso di variazione dell'energia termica sia uguale alla differenza tra il calore in entrata e quello in uscita per conduzione, più eventuali sorgenti di calore interne. Matematicamente:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + H$$

dove $T(x,y,z,t)$ è la temperatura, ρ è la densità, c_p è la capacità termica specifica a pressione costante, k è la conducibilità termica e H è il tasso di produzione di calore per unità volume (tipicamente dal decadimento radioattivo).

Per un mezzo omogeneo e isotropo (k costante), questa equazione si semplifica in:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + \frac{H}{\rho c_p}$$

dove $\kappa = k/(\rho c_p)$ è la diffusività termica. Per rocce crostali tipiche:

- $k \approx 2,5\text{-}3,5$ W/(m·K)
- $\rho \approx 2700\text{-}2900$ kg/m³
- $c_p \approx 800\text{-}1000$ J/(kg·K)

- $\kappa \approx 10^{-6}$ m²/s

La diffusività termica controlla la velocità con cui le perturbazioni termiche si propagano. La distanza caratteristica L su cui una perturbazione termica diffonde in un tempo t è:

$L \approx \sqrt{(\kappa\, t)}$

Per $\kappa = 10^{-6}$ m²/s e t = 1 Ma = $3{,}15 \times 10^{13}$ s:

$L \approx \sqrt{(10^{-6} \times 3{,}15 \times 10^{13})} \approx 5600$ m ≈ 5,6 km

Questo spiega perché lo spessore della litosfera termica è dell'ordine di decine di chilometri per età di decine di milioni di anni.

3.2.1 Soluzione Stazionaria con Produzione Radiogenica

Per il caso stazionario ($\partial T/\partial t = 0$) unidimensionale (variazione solo con la profondità z) con produzione di calore costante H_0, l'equazione diventa:

$d^2T/dz^2 = -H_0/k$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine che richiede due condizioni al contorno. Tipicamente:

- $T(0) = T_0$ (temperatura superficiale, ≈ 0-20°C)
- dT/dz|_{z=L} = -q_m/k (flusso di calore dal mantello sottostante alla base della crosta)

La soluzione generale è:

$T(z) = T_0 + (q_m/k)z + (H_0/2k)(L^2 - z^2)$

dove L è lo spessore crostale. Il flusso di calore superficiale q_0 è:

$q_0 = -k\, dT/dz|_\{z=0\} = q_m + H_0\, L$

Questa equazione mostra che il flusso superficiale è la somma del flusso mantellico (attraverso la Moho) e del contributo dalla produzione radiogenica integrata attraverso la crosta.

Per crosta continentale tipica:

- L ≈ 35 km = 35000 m
- $H_0 \approx 1{,}5 \times 10^{-6}$ W/m³ (concentrazione media di U ≈ 2,5 ppm, Th ≈ 10 ppm, K ≈ 2,5%)
- q_m ≈ 25 mW/m²
- k ≈ 2,5 W/(m·K)

Il contributo radiogenico è:

$q_rad = H_0\, L = 1{,}5 \times 10^{-6} \times 35000 = 0{,}0525$ W/m² = 52,5 mW/m²

Quindi:

$q_0 = 25 + 52,5 = 77,5$ mW/m²

Questo è vicino al valore osservato medio per crosta continentale stabile (60-80 mW/m²).

La temperatura alla base della crosta (z = L) è:

$T(L) = T_0 + (q_m L)/k + (H_0 L^2)/(2k)$

$T(35\text{ km}) = 15 + (0,025 \times 35000)/2,5 + (1,5 \times 10^{-6} \times 35000^2)/(2 \times 2,5)$

$T(35\text{ km}) = 15 + 350 + 367,5 = 732,5°C \approx 730°C$

Questo valore è coerente con le temperature della Moho stimate da xenoliti mantellici e considerazioni petrologiche.

3.2.2 Decadimento Esponenziale della Produzione Radiogenica

In realtà, la produzione di calore radiogenico non è costante con la profondità ma decresce esponenzialmente perché gli elementi radioattivi (U, Th, K) sono incompatibili e tendono a concentrarsi nella crosta superiore durante la fusione parziale e la differenziazione. Un modello più realistico è:

$H(z) = H_0 \exp(-z/h_r)$

dove h_r è la profondità caratteristica di decadimento, tipicamente $h_r \approx 10$ km.

Con questa distribuzione, l'equazione del calore stazionaria diventa:

$d^2T/dz^2 = -(H_0/k) \exp(-z/h_r)$

Integrando una volta:

$dT/dz = (H_0 h_r)/k \exp(-z/h_r) + C_1$

Con la condizione al contorno $dT/dz|_{z=L} = -q_m/k$ (assumendo $L >> h_r$ così che il termine esponenziale è trascurabile alla Moho):

$C_1 = -q_m/k$

Integrando nuovamente:

$T(z) = T_0 - (H_0 h_r^2)/k \exp(-z/h_r) - (q_m/k)z + C_2$

Con $T(0) = T_0$, otteniamo $C_2 = (H_0 h_r^2)/k$, quindi:

$T(z) = T_0 + (q_m/k)z + (H_0 h_r^2)/k [1 - \exp(-z/h_r)]$

Il flusso di calore superficiale è ora:

$q_0 = -k\, dT/dz|_{z=0} = q_m + H_0\, h_r$

Con $H_0 = 3 \times 10^{-6}$ W/m³ (crosta superiore arricchita) e $h_r = 10$ km:

$q_0 = 25 + 3 \times 10^{-6} \times 10000 = 25 + 30 = 55$ mW/m²

La relazione lineare tra flusso di calore superficiale e produzione di calore integrata (relazione di Birch):

$q_0 = q_m + A\, H_s$

dove H_s è la produzione di calore superficiale e A è una costante ($\approx h_r$ per il modello esponenziale), è stata verificata empiricamente in molte regioni continentali e fornisce un metodo per stimare il flusso mantellico da misure superficiali.

3.3 Raffreddamento della Litosfera Oceanica

La litosfera oceanica fornisce un laboratorio naturale ideale per testare modelli termici perché la sua età è conosciuta con precisione dalla datazione magnetica del fondale oceanico e perché le condizioni al contorno sono ben definite: temperatura superficiale $T_0 \approx 0$°C all'interfaccia acqua-sedimento e temperatura $T_m \approx 1350$°C alla base della litosfera termica (definita dall'isoterma che separa la litosfera conduttiva dall'astenosfera convettiva).

3.3.1 Modello Half-Space Cooling

Il modello più semplice tratta la litosfera oceanica come un semi-spazio semi-infinito inizialmente a temperatura uniforme T_m che viene improvvisamente raffreddato in superficie a T_0 al tempo $t = 0$ (momento della formazione alla dorsale). Questo è un problema classico di conduzione termica transitoria con soluzione analitica nota.

L'equazione del calore è:

$\partial T/\partial t = \kappa\, \partial^2 T/\partial z^2$

Con condizioni al contorno e iniziali:

- $T(0,t) = T_0$ per $t > 0$
- $T(z,0) = T_m$ per $z > 0$
- $T(\infty,t) = T_m$ per $t > 0$

La soluzione è:

$T(z,t) = T_0 + (T_m - T_0)\, \mathrm{erf}(z / (2\sqrt{(\kappa t)}))$

dove erf è la funzione errore:

$\mathrm{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x \exp(-u^2)\, du$

Il flusso di calore superficiale è:

$q(t) = -k\,\partial T/\partial z|_{z=0} = k(T_m - T_0) / \sqrt{(\pi\kappa t)}$

Con $k = 3{,}1$ W/(m·K), $\kappa = 10^{-6}$ m²/s, $T_m - T_0 \approx 1350$ K:

$q(t) = (3{,}1 \times 1350) / \sqrt{(\pi \times 10^{-6} \times t)} = 4185 / \sqrt{t}$ [mW/m²]

dove t è in secondi. Per età oceanica espressa in milioni di anni (Ma):

$t\,[s] = \tau\,[Ma] \times 3{,}15 \times 10^{13}$

$q(\tau) = 4185 / \sqrt{(\tau \times 3{,}15 \times 10^{13})} = 4185 / (5{,}61 \times 10^{6} \sqrt{\tau}) \approx 746 / \sqrt{\tau}$ [mW/m²]

Questa è la famosa legge $q \propto \tau^{(-1/2)}$, dove τ è l'età in Ma.

Per litosfera di 50 Ma:

$q(50\ Ma) = 746 / \sqrt{50} \approx 105{,}5$ mW/m²

Per 100 Ma:

$q(100\ Ma) = 746 / 10 = 74{,}6$ mW/m²

Queste previsioni sono in buon accordo con le misure per litosfera giovane (< 70-80 Ma), ma per litosfera più vecchia i valori osservati sono sistematicamente maggiori di quelli previsti, suggerendo che il modello semi-spazio è incompleto.

La subsidenza della litosfera oceanica (profondità del fondale rispetto alla dorsale) dovuta al raffreddamento e alla conseguente contrazione termica può essere calcolata dalla integrazione del coefficiente di espansione termica $\alpha_{thermal} \approx 3 \times 10^{-5}$ K⁻¹ lungo il profilo termico:

$w(t) = \int_0^{\infty} \alpha_{thermal} [T_m - T(z,t)]\, dz$

Sostituendo la soluzione per T(z,t) e integrando:

$w(t) = (2/\sqrt{\pi})\, \alpha_{thermal}\, (T_m - T_0)\, \sqrt{(\kappa t)}$

Numericamente:

$w(\tau) = (2/\sqrt{\pi}) \times 3 \times 10^{-5} \times 1350 \times \sqrt{(10^{-6} \times \tau \times 3{,}15 \times 10^{13})}$

$w(\tau) \approx 305 \sqrt{\tau}$ [metri]

Per $\tau = 50$ Ma:

$w(50) \approx 305 \times \sqrt{50} \approx 2156$ m ≈ 2,2 km

La profondità totale del fondale oceanico rispetto al livello del mare $d(\tau)$ include anche la profondità della dorsale d_0 (tipicamente 2,5-3 km):

$d(\tau) = d_0 + 305 \sqrt{\tau}$

Questa relazione $d \propto \sqrt{\tau}$ è ben verificata per litosfera giovane ma, come per il flusso di calore, mostra deviazioni per età > 70-80 Ma, dove la subsidenza osservata diventa asintoticamente costante invece di continuare ad aumentare.

3.3.2 Modello Plate Cooling

Per risolvere le discrepanze del modello half-space per litosfera vecchia, è stato sviluppato il modello plate, dove la litosfera ha spessore massimo finito L (tipicamente 95-125 km) oltre il quale la temperatura è mantenuta costante a T_m dalla convezione astenosferica sottostante. Le condizioni al contorno diventano:

- $T(0,t) = T_0$
- $T(L,t) = T_m$
- $T(z,0) = T_m$ per $0 < z < L$

La soluzione richiede serie di Fourier:

$$T(z,t) = T_0 + (T_m - T_0)\, z/L + (2(T_m - T_0)/\pi) \Sigma_{n=1}^{\infty} (1/n) \sin(n\pi z/L) \exp(-n^2\pi^2\kappa t/L^2)$$

Per tempi lunghi ($t >> L^2/(\kappa\pi^2) \approx 100$ Ma per L = 100 km), la soluzione raggiunge uno stato stazionario lineare:

$$T(z) \rightarrow T_0 + (T_m - T_0)\, z/L$$

Il flusso di calore superficiale tende asintoticamente a:

$$q_{\infty} = k(T_m - T_0)/L$$

Con L = 100 km = 10^5 m:

$$q_{\infty} = (3{,}1 \times 1350) / 10^5 = 0{,}0419 \text{ W/m}^2 \approx 42 \text{ mW/m}^2$$

Questo è vicino ai valori osservati per litosfera oceanica molto vecchia (> 100 Ma), validando il modello plate.

La subsidenza nel modello plate raggiunge un valore asintotico:

$$w_{\infty} = \alpha_{thermal} (T_m - T_0)\, L / 2$$

$$w_{\infty} = 3 \times 10^{-5} \times 1350 \times 10^5 / 2 \approx 2025 \text{ m} \approx 2 \text{ km}$$

Le osservazioni mostrano subsidenza asintotica di circa 5,5-6 km di profondità totale, che considerando una profondità alla dorsale di 2,5 km implica subsidenza termica di circa 3-3,5 km, suggerendo L ≈ 150 km o temperature astensoferiche leggermente superiori a 1350°C.

3.3.3 Spessore Elastico vs Spessore Termico

È importante distinguere tra lo spessore elastico effettivo T_e discusso nel capitolo sulla flessura litosferica e lo spessore termico della litosfera L. Mentre L è definito dall'isoterma (~1300°C) che separa comportamento conduttivo da convettivo, T_e è definito dalla

profondità fino a cui la litosfera si comporta elasticamente su scale temporali geologiche (milioni di anni).

Poiché il creep duttile diventa significativo a temperature più basse dell'isoterma astenosferica (tipicamente 600-800°C per la crosta e 700-900°C per il mantello olivinico), lo spessore elastico è generalmente minore dello spessore termico:

$T_e \approx (0,3\text{-}0,6)\ L$

Questa relazione varia con il tasso di deformazione: carichi applicati rapidamente (scale di 10^4-10^5 anni) vedono T_e maggiore, mentre carichi a lungo termine (> 10^7 anni) vedono T_e minore per rilassamento viscoso.

3.4 Geoterme e Solidus Mantellico

La geoterma è il profilo della temperatura in funzione della profondità all'interno della Terra. La forma della geoterma controlla processi critici come la fusione parziale del mantello, la reologia litosferica, le transizioni di fase mineralogiche e la convezione.

3.4.1 Geoterma Adiabatica

Nel mantello profondo, dove la convezione è vigorosa, la temperatura segue approssimativamente un gradiente adiabatico. Per un processo adiabatico (senza scambio di calore con l'esterno), la variazione di temperatura con la pressione è data da:

$$\left(\partial T/\partial P\right)_s = \left(\alpha_{thermal}\, T\right) / \left(\rho\, c_p\right)$$

dove il pedice s indica entropia costante. Utilizzando la relazione idrostatica $dP = \rho\, g\, dz$, possiamo scrivere:

$$dT/dz = \left(\alpha_{thermal}\, g\, T\right) / c_p$$

Questa è l'equazione differenziale per il gradiente adiabatico. Per il mantello superiore, con $\alpha_{thermal} \approx 2,5 \times 10^{-5}\ K^{-1}$, $g \approx 10\ m/s^2$, $c_p \approx 1200\ J/(kg \cdot K)$:

$$dT/dz \approx (2,5 \times 10^{-5} \times 10 \times T) / 1200 \approx 2,1 \times 10^{-7}\ T$$

Per $T \approx 1600$ K (temperatura tipica a 100 km di profondità):

$$dT/dz \approx 0,34\ K/km$$

Questo gradiente adiabatico è molto più piccolo del gradiente conduttivo nella litosfera (tipicamente 10-30 K/km), il che è una manifestazione dell'efficienza del trasporto convettivo di calore.

Integrando dall'astenosfera superiore (z_0 = 100 km, T_0 = 1600 K) alla base del mantello (z = 2890 km):

$$\int_{T_0}^{T} dT/T = \int_{z_0}^{z} \left(\alpha\, g / c_p\right) dz'$$

Assumendo α, g e c_p costanti (approssimazione rozza ma utile):

$\ln(T/T_0) = (\alpha\, g / c_p)\,(z - z_0)$

$T(z) = T_0 \exp[(\alpha\, g / c_p)(z - z_0)]$

Per z = 2890 km:

$T(2890\ \text{km}) = 1600 \exp[(2{,}5 \times 10^{-5} \times 10 / 1200) \times (2890000 - 100000)]$

$T(2890\ \text{km}) = 1600 \exp[2{,}1 \times 10^{-7} \times 2790000] \approx 1600 \exp[0{,}586] \approx 2850\ \text{K}$

Questo è inferiore alle stime reali della temperatura alla CMB (3800-4200 K) perché abbiamo trascurato la compressione adiabatica (α diminuisce e c_p aumenta con la profondità) e perché esiste uno strato termico di confine alla base del mantello con gradiente superadiabatico.

Una formula più accurata che tiene conto della variazione di α e c_p con la profondità, basata su modelli termodinamici, dà:

$T(z) \approx T_0 \exp[\int_{P_0}^{P(z)} (\gamma_{\text{Grüneisen}} / K_s)\, dP']$

dove γ_Grüneisen ≈ 1,0-1,5 è il parametro di Grüneisen (che caratterizza la variazione della frequenza di vibrazione reticolare con il volume) e K_s è il modulo di incomprimibilità adiabatico. Questa formula dà temperature alla CMB di circa 2500-2800 K per adiabata, che devono essere corrette per lo strato limite termico basale.

3.4.2 Solidus del Mantello Peridotitico

Il solidus rappresenta la temperatura alla quale inizia la fusione parziale di una roccia a una data pressione. Per il mantello peridotitico (composizione olivina + pirosseni + granato/spinello), il solidus è stato determinato sperimentalmente ad alte pressioni e può essere approssimato da:

$T_{\text{solidus}}(P) = T_0 + aP + bP^2$

dove T_0, a e b sono costanti determinate empiricamente. Una parametrizzazione comune è:

$T_{\text{solidus}}\ [\text{K}] = 1373 + 5{,}1 \times P[\text{GPa}] - 0{,}00012 \times P[\text{GPa}]^2$

Per P = 3 GPa (≈ 100 km di profondità nel mantello):

$T_{\text{solidus}}(3\ \text{GPa}) = 1373 + 5{,}1 \times 3 - 0{,}00012 \times 9 = 1373 + 15{,}3 - 0{,}001 \approx 1388\ \text{K} \approx 1115°\text{C}$

Confrontando con la geoterma: se la temperatura del mantello a 100 km è circa 1600 K ≈ 1327°C, questa è superiore al solidus, suggerendo che il mantello dovrebbe fondere. Tuttavia, la fusione non avviene perché il mantello è generalmente anidro o povero di volatili. La presenza anche di piccole quantità di acqua (poche centinaia di ppm) abbassa significativamente il solidus:

$T_{solidus,wet}(P) \approx T_{solidus,dry}(P) - 600\ K$

Con volatili, il solidus a 3 GPa diventa circa 800°C, ben al di sotto della geoterma, spiegando la presenza di fusione parziale in zone di subduzione dove l'acqua è rilasciata dalla disidratazione della crosta oceanica.

Sotto dorsali medio-oceaniche, l'upwelling del mantello causa decompressione adiabatica. Seguendo un'adiabata, la temperatura del mantello che sale diminuisce secondo:

$dT/dP = (\alpha_{thermal}\, T)/(\rho\, c_p) \approx 0{,}1\ K/km$

Ma il solidus ha pendenza maggiore:

$dT_{solidus}/dP \approx 5{,}1\ K/GPa \times (10\ MPa/km / 1000\ MPa/GPa) \approx 0{,}17\ K/km$

Poiché $dT_{solidus}/dP > dT/dP$, il mantello che sale eventualmente interseca il solidus e inizia a fondere. La profondità di inizio fusione z_{onset} si trova dove la geoterma incontra il solidus.

Se il mantello inizia a salire dalla profondità z_1 con temperatura T_1 lungo un'adiabata, la sua temperatura a profondità z è:

$T(z) = T_1 \exp[-(\alpha\, g / c_p)(z_1 - z)]$

Approssimando l'esponenziale per piccole variazioni:

$T(z) \approx T_1\,[1 - (\alpha\, g / c_p)(z_1 - z)] = T_1 - T_1(\alpha\, g / c_p)(z_1 - z)$

$dT/dz \approx T_1(\alpha\, g / c_p) \approx 0{,}34\ K/km$ (come calcolato prima)

La profondità di inizio fusione sotto dorsali con temperatura potenziale (temperatura che il mantello avrebbe a P = 0 seguendo un'adiabata) $T_{pot} \approx 1600\ K$ è circa:

$z_{onset} \approx 60\text{-}80\ km$

La frazione di fusione F generata durante l'upwelling può essere stimata da bilanci di entalpia. Assumendo che tutto il calore rilasciato raffreddando la massa solida vada in calore latente di fusione $L_{fusion} \approx 600\ kJ/kg$:

$F \approx c_p\, \Delta T / L_{fusion}$

Dove ΔT è il "superheating" rispetto al solidus. Per $\Delta T \approx 200\ K$:

$F \approx (1200 \times 200) / (600 \times 10^3) = 0{,}4 = 40\%$

Questo è eccessivo; in realtà la fusione è autoregolata perché l'estrazione del liquido raffredda il residuo (il liquido ha entalpia maggiore). Modelli dettagliati mostrano che la frazione di fusione totale aggregata prodotta durante l'upwelling sotto dorsali normali è circa 10-20%, consistente con lo spessore di crosta oceanica prodotta (6-7 km).

3.5 Produzione Radiogenica di Calore

Il decadimento radioattivo degli isotopi instabili è una sorgente fondamentale di calore interno terrestre. I quattro isotopi principali sono:

1. **Uranio-238 (^{238}U)**: tempo di dimezzamento $t_{1/2} = 4{,}47 \times 10^9$ anni, energia per decadimento E = 51,7 MeV
2. **Uranio-235 (^{235}U)**: $t_{1/2} = 0{,}704 \times 10^9$ anni, E = 46,4 MeV
3. **Torio-232 (^{232}Th)**: $t_{1/2} = 14{,}0 \times 10^9$ anni, E = 42,7 MeV
4. **Potassio-40 (^{40}K)**: $t_{1/2} = 1{,}25 \times 10^9$ anni, E = 1,31 MeV (solo il ramo di decadimento a ^{40}Ca, 89% dei decadimenti)

La produzione di calore per unità massa h [W/kg] dovuta a un isotopo con concentrazione C [ppm o %], tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ [anni], energia per decadimento E [MeV] e massa atomica A è:

$$h = (\lambda N_A C E) / A$$

dove $\lambda = \ln(2)/t_{1/2}$ è la costante di decadimento e $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$ mol^{-1} è il numero di Avogadro.

Convertendo le unità (1 MeV = $1{,}602 \times 10^{-13}$ J, 1 anno = $3{,}156 \times 10^7$ s):

$$h\,[\text{W/kg}] = (9{,}52 \times 10^{-17} \times C[\text{ppm}] \times E[\text{MeV}]) / (A \times t_{1/2}[\text{anni}])$$

Per ^{238}U con C = 1 ppm:

$$h(^{238}\text{U}) = (9{,}52 \times 10^{-17} \times 1 \times 51{,}7) / (238 \times 4{,}47 \times 10^9)$$

$$h(^{238}\text{U}) = 4{,}62 \times 10^{-12} \text{ W/kg per ppm}$$

Similmente:

- $h(^{235}\text{U}) = 2{,}68 \times 10^{-11}$ W/kg per ppm (ma abbondanza naturale solo 0,72% di U totale)
- $h(^{232}\text{Th}) = 2{,}64 \times 10^{-13}$ W/kg per ppm
- $h(^{40}\text{K}) = 3{,}58 \times 10^{-14}$ W/kg per ppm (ma K naturale ha solo 0,0117% di ^{40}K)

Per una roccia granitica della crosta superiore con composizione tipica:

- U = 3 ppm, Th = 12 ppm, K = 3,5% = 35000 ppm

La produzione totale è:

$$h_{totale} = 3 \times 4{,}62 \times 10^{-12} + 0{,}0216 \times 2{,}68 \times 10^{-11} + 12 \times 2{,}64 \times 10^{-13} + 35000 \times 0{,}000117 \times 3{,}58 \times 10^{-14}$$

$$h_{totale} \approx 1{,}39 \times 10^{-11} + 5{,}79 \times 10^{-13} + 3{,}17 \times 10^{-12} + 1{,}46 \times 10^{-11}$$

$$h_{totale} \approx 3{,}2 \times 10^{-11} \text{ W/kg}$$

Per densità $\rho = 2700$ kg/m³:

$H = \rho h = 2700 \times 3{,}2 \times 10^{-11} \approx 8{,}6 \times 10^{-8}$ W/m³ = 0,086 μW/m³

Questo valore è tipico per graniti crustali superiori. La crosta continentale media ha concentrazioni inferiori (U ≈ 1,5 ppm, Th ≈ 6 ppm, K ≈ 1,5%), dando $H \approx 1{,}5 \times 10^{-6}$ W/m³.

Il mantello peridotitico è molto più povero in elementi radioattivi (U ≈ 0,01 ppm, Th ≈ 0,04 ppm, K ≈ 0,01%), risultando in:

$H_{mantello} \approx 10^{-8}$ W/m³ = 0,01 μW/m³

Nonostante questa bassa concentrazione, il mantello contribuisce circa 20 TW al budget termico totale della Terra a causa del suo volume enorme ($\approx 9 \times 10^{20}$ m³).

La produzione radiogenica totale della Terra P_{rad} può essere stimata da:

$P_{rad} = V_{crosta} H_{crosta} + V_{mantello} H_{mantello} + V_{nucleo} H_{nucleo}$

Con $V_{crosta} \approx 10^{19}$ m³, $V_{mantello} \approx 9 \times 10^{20}$ m³, assumendo $H_{nucleo} \approx 0$ (il nucleo metallico non contiene U, Th, K significativi):

$P_{rad} \approx 10^{19} \times 1{,}5 \times 10^{-6} + 9 \times 10^{20} \times 10^{-8}$

$P_{rad} \approx 1{,}5 \times 10^{13} + 9 \times 10^{12} = 2{,}4 \times 10^{13}$ W = 24 TW

Questo è consistente con stime indipendenti basate su misure di neutrini geoneutrini prodotti dal decadimento di U e Th, che indicano 20-25 TW.

3.5.1 Evoluzione Temporale della Produzione Radiogenica

Poiché i tempi di dimezzamento sono paragonabili all'età della Terra ($t_{Terra} = 4{,}54 \times 10^9$ anni), la produzione radiogenica era significativamente maggiore nel passato. Il tasso di produzione al tempo t nel passato (t = 0 oggi, t negativo nel passato) è:

$H(t) = H_0 \exp(-\lambda t)$

Per ^{238}U ($\lambda = \ln(2)/(4{,}47 \times 10^9) = 1{,}55 \times 10^{-10}$ anno^{-1}):

$H_{238}(t = -4{,}5 \times 10^9 \text{ anni}) / H_{238}(0) = \exp[1{,}55 \times 10^{-10} \times 4{,}5 \times 10^9] = \exp(0{,}697) \approx 2{,}0$

Per ^{40}K ($\lambda = 5{,}54 \times 10^{-10}$ anno^{-1}):

$H_K(t = -4{,}5 \times 10^9) / H_K(0) = \exp[5{,}54 \times 10^{-10} \times 4{,}5 \times 10^9] = \exp(2{,}49) \approx 12$

Il ^{40}K contribuiva molto di più nel passato! La produzione radiogenica totale all'inizio della storia terrestre era circa 3-4 volte maggiore di oggi, implicando che la convezione mantellica era più vigorosa, il flusso di calore superficiale più elevato, e la tettonica delle placche potenzialmente più rapida.

3.6 Convezione Termica vs Convezione Composizionale

Nel mantello terrestre, la convezione può essere guidata sia da gradienti termici (convezione termica) sia da gradienti composizionali (convezione composizionale o chimica). I due meccanismi hanno dinamiche distinte.

La convezione termica è guidata dalla galleggiabilità indotta da anomalie di temperatura. Un elemento di fluido caldo ha densità minore per espansione termica:

$\rho(T) = \rho_0 [1 - \alpha_{thermal} (T - T_0)]$

La forza di galleggiabilità per unità volume è:

$F_b = -\Delta\rho\, g = \rho_0\, \alpha_{thermal}\, \Delta T\, g$

Per $\Delta T = 100$ K, $\rho_0 = 3300$ kg/m³, $\alpha_{thermal} = 2{,}5 \times 10^{-5}$ K⁻¹:

$F_b = 3300 \times 2{,}5 \times 10^{-5} \times 100 \times 10 \approx 825$ N/m³

Questa forza relativamente piccola può guidare convezione vigorosa perché agisce su volumi enormi e scale temporali lunghe permettono accumulo di spostamenti significativi anche a velocità basse (cm/anno).

La convezione composizionale è guidata da differenze nella composizione chimica che causano differenze di densità intrinseche, indipendenti dalla temperatura. Per esempio, il materiale crostale oceanico subdotto (basalto + gabbro transformati in eclogite ad alta pressione) è più denso del mantello peridotitico circostante di circa $\Delta\rho \approx 100$-200 kg/m³, fornendo una galleggiabilità negativa che accelera la subduzione:

$F_{b,chem} = -\Delta\rho\, g \approx -150 \times 10 = -1500$ N/m³

Questo è quasi il doppio della forza termica, mostrando che la composizione chimica può dominare la dinamica dove presente.

Il numero di Rayleigh composizionale Ra_C è definito analogamente al numero di Rayleigh termico ma usa $\Delta\rho$ composizionale invece di $\alpha_{thermal}\, \Delta T$:

$Ra_C = (\Delta\rho\, g\, L^3) / (\rho_0\, \eta\, \kappa)$

Il rapporto di densità $R = Ra_C / Ra_T$ indica quale meccanismo domina:

$R = \Delta\rho / (\rho_0\, \alpha_{thermal}\, \Delta T)$

Per $\Delta\rho = 150$ kg/m³, $\rho_0 = 3300$ kg/m³, $\alpha = 2{,}5 \times 10^{-5}$ K⁻¹, $\Delta T = 200$ K:

$R = 150 / (3300 \times 2{,}5 \times 10^{-5} \times 200) = 150 / 16{,}5 \approx 9$

Questo indica che la galleggiabilità composizionale è circa 9 volte più forte di quella termica per materiale subdotto, spiegando perché le placche oceaniche scendono fino alla base del mantello nonostante si riscaldino gradualmente.

Un aspetto cruciale è che mentre il calore diffonde (con diffusività termica $\kappa \approx 10^{-6}$ m²/s), la composizione chimica non diffonde a scale geologicamente rilevanti (la diffusività chimica in solidi silicatici è $D_{chem} \approx 10^{-20}$ m²/s o inferiore a temperature mantelloniche). Questo significa che anomalie termiche si omogenizzano su scale di milioni di anni, mentre anomalie composizionali possono persistere indefinitamente a meno che non siano mescolate meccanicamente dalla convezione.

Il numero di Péclet composizionale Pe_c misura il rapporto tra trasporto advettivo e diffusivo di composizione:

$$Pe_c = V L / D_{chem}$$

Con $V \approx 50$ mm/anno $= 1{,}6 \times 10^{-9}$ m/s (velocità di convezione mantellica), $L \approx 10^6$ m (scala mantellica):

$$Pe_c = (1{,}6 \times 10^{-9} \times 10^6) / 10^{-20} = 1{,}6 \times 10^{27}$$

Questo numero astronomicamente grande indica che la composizione è trasportata quasi interamente per advection, e la diffusione molecolare è completamente trascurabile. Di conseguenza, il mantello potrebbe contenere eterogeneità composizionali "fossili" preservate dalla formazione della Terra.

Rischi Geologici e Monitoraggio

Introduzione ai Rischi Geologici

I rischi geologici (geological hazards o geohazards) rappresentano fenomeni naturali potenzialmente dannosi per la società umana, le infrastrutture e l'ambiente. A differenza dei rischi antropici puri, i rischi geologici derivano da processi geodinamici endogeni (terremoti, vulcanismo, tsunami) o esogeni (frane, erosione, subsidenza) che operano su scale temporali che vanno da secondi (terremoti) a millenni (movimenti tettonici).

La valutazione del rischio geologico R si basa su tre componenti fondamentali:

$$R = H \times V \times E$$

dove:

- **H** (Hazard/Pericolosità): probabilità che un evento di una certa magnitudo si verifichi in un dato intervallo temporale
- **V** (Vulnerability/Vulnerabilità): frazione di valore esposto che sarebbe perso se l'evento si verificasse
- **E** (Exposure/Esposizione): valore totale (vite umane, beni, infrastrutture) presente nell'area a rischio

Questa formulazione mostra che il rischio può essere mitigato intervenendo su qualsiasi dei tre fattori: riducendo la pericolosità (impossibile per fenomeni naturali, ma possibile ridurre

l'impatto con sistemi di early warning), diminuendo la vulnerabilità (edifici antisismici, codici di costruzione), o limitando l'esposizione (zonazione territoriale, evacuazioni preventive).

Il monitoraggio geofisico e geodinamico fornisce dati critici per quantificare H, sviluppare modelli predittivi e implementare sistemi di allerta precoce che possono salvare migliaia di vite. L'integrazione di reti sismiche, GPS, InSAR satellitare, sensori geochimici e termici permette un approccio multiparametrico che è essenziale per comprendere fenomeni complessi come l'attività vulcanica.

Early Warning Sismico

I sistemi di allerta sismica precoce (Earthquake Early Warning, EEW) sfruttano il fatto che le onde sismiche viaggiano a velocità finita (tipicamente 3-8 km/s) mentre i segnali elettromagnetici viaggiano quasi istantaneamente (~300.000 km/s). Questo differenziale di velocità crea una finestra temporale tra la rilevazione del terremoto alla sorgente e l'arrivo delle onde distruttive nei centri abitati distanti.

7.2.1 Fondamenti Fisici dell'Early Warning

Quando si verifica un terremoto, vengono generate diverse tipologie di onde sismiche che si propagano dalla sorgente con velocità diverse:

1. **Onde P** (primarie, longitudinali): velocità $v_P \approx 6\text{-}8$ km/s nella crosta, comprimono e dilatano il mezzo nella direzione di propagazione
2. **Onde S** (secondarie, trasversali): velocità $v_S \approx 3{,}5\text{-}4{,}5$ km/s, causano scuotimento perpendicolare alla direzione di propagazione
3. **Onde superficiali** (Love e Rayleigh): velocità $v_{surf} \approx 2{,}5\text{-}4$ km/s, responsabili del danno maggiore

Il rapporto delle velocità è governato dai moduli elastici del mezzo:

$$v_P = \sqrt{[(K + 4\mu/3)/\rho]} \quad v_S = \sqrt{[\mu/\rho]}$$

dove K è il modulo di incomprimibilità, μ il modulo di taglio (shear modulus) e ρ la densità. Per rocce crostali tipiche:

$$v_P/v_S = \sqrt{[(K + 4\mu/3)/\mu]} \approx \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

Il tempo di preavviso disponibile Δt per una stazione situata a distanza epicentrale D dal terremoto, dopo che le onde P hanno raggiunto una stazione di rilevamento vicina alla sorgente a distanza D_0, è:

$$\Delta t = D/v_S - D_0/v_P - t_{processing}$$

dove $t_{processing} \approx 1\text{-}3$ s è il tempo necessario per rilevare, localizzare e trasmettere l'allerta.

Per un terremoto a 30 km di profondità rilevato da una stazione a $D_0 = 10$ km dalla proiezione superficiale dell'ipocentro, con un centro abitato a $D = 100$ km:

Distanza ipocentrale alla stazione: $d_0 = \sqrt{(10^2 + 30^2)} = \sqrt{1000} \approx 31{,}6$ km Distanza ipocentrale al centro abitato: $d = \sqrt{(100^2 + 30^2)} = \sqrt{10900} \approx 104{,}4$ km

Tempo arrivo onda P alla stazione: $t_{P,0} = 31{,}6/6{,}5 \approx 4{,}9$ s Tempo arrivo onda S al centro abitato: $t_S = 104{,}4/3{,}8 \approx 27{,}5$ s

Tempo disponibile: $\Delta t = 27{,}5 - 4{,}9 - 2 \approx 20{,}6$ s

Anche 10-20 secondi di preavviso permettono azioni automatiche salvavita: fermare treni ad alta velocità, chiudere valvole del gas, portare ascensori ai piani più vicini, attivare sistemi di emergenza in ospedali e centrali nucleari, e dare alle persone il tempo di ripararsi sotto strutture resistenti.

Stima Rapida della Magnitudo

Un aspetto critico dei sistemi EEW è la capacità di stimare rapidamente la magnitudo M del terremoto usando solo i primi secondi delle onde P, prima che arrivino le onde S distruttive. Diversi approcci sono stati sviluppati:

Metodo del Periodo Predominante (τ_c)

Il parametro τ_c è definito come:

$$\tau_c = 2\pi \sqrt{\left[\int u^2(t)\, dt \,/\, \int [du/dt]^2\, dt\right]}$$

dove $u(t)$ è il displacement verticale registrato. τ_c rappresenta una misura del periodo predominante del segnale nei primi 3-4 secondi di onde P. Empiricamente:

$$M \approx a \log_{10}(\tau_c) + b \log_{10}(D) + c$$

dove D è la distanza ipocentrale, e i coefficienti ($a \approx 2{,}5$, $b \approx 1{,}3$, $c \approx$ costante regionale) sono calibrati per ogni regione. Per terremoti con $M > 6$, τ_c satura tipicamente a $\tau_c \approx 1$-2 s, limitando la discriminazione tra eventi molto grandi.

Peak Displacement (P_d)

Un altro parametro è l'ampiezza del displacement massimo P_d nelle onde P nei primi secondi:

$$\log_{10}(P_d) = aM + b \log_{10}(D) + c$$

Invertendo:

$$M \approx [\log_{10}(P_d) - b \log_{10}(D) - c]/a$$

Tipicamente $a \approx 0{,}5$-$0{,}6$ per la relazione di attenuazione nella crosta. Combinando τ_c e P_d con algoritmi di machine learning si ottengono stime di M con incertezza ±0,3-0,5 unità nei primi 3-5 secondi.

Approccio Bayesiano Evolutivo

I sistemi più avanzati usano stima bayesiana che aggiorna continuamente la probabilità P(M|data) mentre arrivano dati da più stazioni:

$$P(M|data) \propto P(data|M) \times P(M)$$

dove P(M) è la prior (basata su statistiche regionali di sismicità) e P(data|M) è la likelihood (probabilità dei dati osservati dato un terremoto di magnitudo M). Questo approccio permette di ridurre progressivamente l'incertezza e di evitare falsi allarmi.

Sistemi EEW nel Mondo

Sistema Giapponese (JMA)

Il Giappone ha il sistema EEW più avanzato, operativo dal 2007. Include oltre 1000 sismometri ad alta frequenza (100 Hz) con latenza di trasmissione < 1 s. Il sistema ha emesso allerte efficaci per il terremoto di Tohoku M9.0 del 2011, fornendo 15-30 secondi di preavviso a Tokyo (300 km dall'epicentro), permettendo di fermare 27 treni shinkansen senza deragliamenti.

Le performance sono misurate in termini di:

- **Lead time**: tempo medio di preavviso = 15-20 s per D > 100 km
- **Reliability**: percentuale di allarmi corretti ≈ 85-90%
- **Completeness**: percentuale di terremoti M > 5,0 rilevati ≈ 95%

Sistema Californiano (ShakeAlert)

Operativo dal 2019, ShakeAlert copre California, Oregon e Washington con ~1500 stazioni. Usa algoritmi multipli in parallelo:

- ElarmS (Earthquake Alarm Systems): point-source single-station
- OnSite: point-source regional
- FinDer (Finite-Fault Detector): finite-fault line-source

Per il terremoto di Ridgecrest M7.1 (2019), ShakeAlert ha fornito 48 secondi di preavviso a Los Angeles (200 km).

Sistema Messicano (SASMEX)

Operativo dal 1991, SASMEX sfrutta la geometria favorevole: la zona di subduzione di Guerrero (dove si generano i grandi terremoti) è a 300 km da Città del Messico. Con velocità onde S di 3,5 km/s, il tempo di propagazione è ~85 s, mentre l'allerta arriva in 10-15 s, dando 60-70 secondi di preavviso.

Limitazioni e Sviluppi Futuri

Le limitazioni principali dei sistemi EEW sono:

1. **Blind zone**: la zona entro 20-30 km dall'epicentro riceve preavviso minimo o nullo
2. **Saturazione magnitudo**: difficoltà a distinguere rapidamente M7.5 da M8.5+

3. **Falsi allarmi**: esplosioni in cava, glitch strumentali possono trigger allerte
4. **Complessità sorgente**: rottura finite-fault richiede modelli più sofisticati

Sviluppi futuri includono:

- **Sistemi offshore**: OBS (Ocean Bottom Seismometers) in zone di subduzione per estendere il rilevamento
- **Sensori MEMS distribuiti**: accelerometri microelettromeccanici a basso costo (~$50/unità) in smartphone e IoT
- **Machine learning**: reti neurali convoluzionali per classificazione automatica segnali P/rumore
- **Integrazione geodesia**: dati GPS ad alta frequenza (1-10 Hz) per stima displacement statico permanente, critico per tsunami warning

Precursori Vulcanici Multiparametrici

Il monitoraggio vulcanico integra osservazioni geofisiche, geodetiche, geochimiche e termiche per rilevare segnali precursori di eruzioni. A differenza dei terremoti, che hanno precursori scarsi e ambigui, i vulcani mostrano cambiamenti misurabili settimane-mesi prima di eruzioni, permettendo evacuazioni preventive efficaci.

Sismicità Vulcanica

L'intrusione di magma nella crosta superiore causa fratturazione della roccia e movimento di fluidi, generando sismicità caratteristica:

Volcano-Tectonic (VT) earthquakes

Eventi simili a terremoti tettonici normali, causati da fratturazione fragile. Frequenze dominanti 5-15 Hz, magnitudo tipica $M < 3$. La loro occorrenza indica stress crescente nella roccia incassante dovuto a pressurizzazione del sistema magmatico.

Il tasso di occorrenza $N(t)$ spesso aumenta esponenzialmente prima di un'eruzione:

$$N(t) = N_0 \exp[(t - t_{erupt})/\tau]$$

dove $\tau \approx 10$-50 giorni è il tempo caratteristico di accelerazione. Per l'eruzione del Pinatubo (1991), il tasso di eventi VT è aumentato da ~10/giorno (2 mesi prima) a ~500/giorno (1 settimana prima).

Long-Period (LP) earthquakes

Oscillazioni a bassa frequenza (0,5-5 Hz) associate a risonanza di cavità riempite di fluido/gas. Il modello più semplice tratta la sorgente come un crack pressurizzato:

$$f_{resonance} = (v_P)/(4L) \times \sqrt{(1 + \rho_{fluid}/\rho_{rock})}$$

dove L è la dimensione del crack. Per $L = 100$ m, $v_P = 3000$ m/s, $\rho_{fluid}/\rho_{rock} \approx 0,5$:

$f \approx 3000/(4 \times 100) \times \sqrt{1,5} \approx 9,2$ Hz

Frequenze più basse indicano crack più grandi o fluidi più densi (magma vs acqua/vapore). L'aumento di eventi LP indica movimentazione attiva di magma degassato o fluidi idrotermali.

Tremor vulcanico

Segnale sismico continuo a bassa frequenza (1-5 Hz) che può durare ore o giorni. Interpretato come risonanza continua del condotto dovuta a flusso turbolento di magma o gas. L'ampiezza A del tremor è empiricamente correlata al tasso di eruzione M_dot:

$A^2 \propto M_dot$

Per Stromboli, $A \approx 10^{-6}$ m/s corrisponde a M_dot ≈ 0,1 kg/s, mentre durante parossismi $A \approx 10^{-4}$ m/s corrisponde a M_dot ≈ 100 kg/s.

Deformazione del Suolo

L'intrusione di magma provoca inflazione dell'edificio vulcanico misurabile con:

- **GPS**: precisione orizzontale ~2-3 mm, verticale ~5-10 mm
- **InSAR**: precisione linea di vista ~5 mm su aree di 100+ km²
- **Tiltmetri**: sensibilità ~10^{-9} rad (equivalente a 1 mm di sollevamento su 1 km)

Modello di Mogi

Il modello più semplice tratta la sorgente magmatica come una sfera di raggio a a profondità d in mezzo elastico omogeneo. La variazione di volume ΔV della camera produce displacement superficiale:

$u_r(r) = [(1-v)/(\pi)] \times [(a^3\Delta P)/(\mu d^2)] \times [r/(r^2+d^2)^{(3/2)}]$

$u_z(r) = [(1-v)/(\pi)] \times [(a^3\Delta P)/(\mu d)] \times [1/(r^2+d^2)^{(3/2)}]$

dove r è la distanza orizzontale dal centro, v ≈ 0,25 è il rapporto di Poisson, μ ≈ 30 GPa il modulo di taglio, e ΔP è la variazione di pressione.

Il displacement verticale massimo è al centro (r = 0):

$u_z,max = [(1-v)/(\pi)] \times [(a^3\Delta P)/(\mu d)]$

Definendo il potency $P = a^3\Delta P/\mu$ (ha dimensioni di volume):

$u_z,max = [(1-v)/(\pi)] \times [P/d]$

Per osservare u_z,max = 10 cm = 0,1 m a d = 5 km = 5000 m:

$P = [\pi d/(1-v)] \times u_z,max = [\pi \times 5000/0,75] \times 0,1 \approx 2094$ m³

Se a = 500 m e μ = 30 GPa:

$\Delta P = (\mu P)/a^3 = (30 \times 10^9 \times 2094)/(500^3) = 5 \times 10^6$ Pa = 5 MPa

Questo è un valore realistico per pressurizzazione pre-eruttiva. Il volume di magma intrudente è:

$\Delta V \approx P = 2100$ m³

Questo è piccolo rispetto ai volumi eruttati (10^6-10^9 m³), indicando che la maggior parte del magma è già nella camera e viene mobilizzato, non intrudente nuovo.

Modelli più complessi

Per sorgenti superficiali (d < 3 km), la superficie libera e stratificazione crostale sono importanti. Si usano modelli di dike (frattura verticale) o sill (frattura orizzontale):

Per un dike rettangolare (lunghezza L, altezza H, apertura W) a profondità d, l'apertura totale è:

$W_total = [(1-v)\Delta P \times L \times H]/(\mu)$

Il momento geodetico M_0,geodetic (analogo al momento sismico) è:

M_0,geodetic = $\mu \times (L \times H \times W)$

Per L = 1 km, H = 2 km, W = 1 m, μ = 30 GPa:

$M_0 = 30 \times 10^9 \times (1000 \times 2000 \times 1) = 6 \times 10^{16}$ N·m

Questo è equivalente a un terremoto di magnitudo:

$M_w = (2/3) \log_{10}(M_0) - 6 = (2/3) \log_{10}(6 \times 10^{16}) - 6 \approx 5{,}0$

L'intrusione di dike produce infatti sciami sismici con M_max ≈ 4-5.

Monitoraggio Geochimico

Il degassamento è un precursore critico perché i volatili (H_2O, CO_2, SO_2, H_2S) esolvono dal magma quando questo sale e decomprime. La composizione dei gas cambia sistematicamente con la profondità e il grado di degassamento.

Rapporto CO_2/SO_2

Il CO_2 esolve a pressioni più alte (~100-300 MPa, 3-10 km) rispetto a SO_2 (~10-50 MPa, <3 km) a causa della sua minore solubilità nel magma. Il rapporto molare CO_2/SO_2 in emissioni fumaroliche o plume diminuisce quando magma fresco arriva a profondità superficiali:

- Degassamento profondo: $CO_2/SO_2 > 10$
- Degassamento superficiale pre-eruttivo: $CO_2/SO_2 \approx 1$-5
- Durante eruzione: $CO_2/SO_2 < 1$

La solubilità di CO_2 nel magma basaltico segue:

$X_CO_2 \approx k\ P^{(1/2)}$

dove $k \approx 4 \times 10^{-8}$ mol/(kg·Pa^(1/2)) e P è la pressione. A P = 100 MPa:

$X_CO_2 \approx 4 \times 10^{-8} \times \sqrt{(10^8)} = 4 \times 10^{-4} = 400$ ppm

A P = 10 MPa:

$X_CO_2 \approx 4 \times 10^{-8} \times \sqrt{(10^7)} \approx 126$ ppm

La differenza (274 ppm) esolve come gas durante decompressione, aumentando il flusso di CO_2 osservabile in superficie.

Flusso di SO_2

Misurato con spettrometri DOAS (Differential Optical Absorption Spectroscopy) o da satellite (OMI, TROPOMI). Il flusso Φ_SO_2 [kg/s o ton/giorno] è:

$\Phi_SO_2 = \int c(x,y)\ v_wind\ dy$

dove c è la concentrazione nella colonna e v_wind la velocità del vento. Prima di eruzioni maggiori, Φ_SO_2 può aumentare da ~100 ton/giorno (background) a >1000 ton/giorno.

La massa totale di SO_2 rilasciata M_SO_2 durante un'eruzione correlata con il volume di magma eruttato V_magma e il contenuto iniziale di zolfo X_S:

$M_SO_2 \approx (64/32) \times \rho_magma \times V_magma \times X_S \times (1 - f_residual)$

dove 64/32 converte S in SO_2, $\rho_magma \approx 2500$ kg/m³, $X_S \approx 0{,}2\%$ per basalto, $f_residual \approx 0{,}2$-$0{,}5$ è la frazione ritenuta nel magma.

Per V = 1 km³ = 10^9 m³:

$M_SO_2 \approx 2 \times 2500 \times 10^9 \times 0{,}002 \times 0{,}6 \approx 6 \times 10^9$ kg = 6 Mton

L'eruzione del Pinatubo (1991) ha emesso ~17 Mton di SO_2, coerente con ~3-5 km³ DRE (Dense Rock Equivalent) eruttati.

$^3He/^4He$ e Radon

Il rapporto $^3He/^4He$ in gas fumarolici distingue sorgenti:

- Mantello: $(^3He/^4He)_sample/R_air \approx 7$-$9$ ($R_air = 1{,}4 \times 10^{-6}$)
- Crosta: $R/R_air \approx 0{,}01$-$0{,}1$

Aumento di R/R_air indica afflusso di volatili mantellici (magma fresco). Il radon ^{222}Rn ($t_{1/2}$ = 3,8 giorni) prodotto da ^{238}U nelle rocce aumenta in concentrazione quando nuove fratture espongono superficie fresca:

$C(t) = C_0\ [1 - \exp(-\lambda t)]$

dove $\lambda = \ln(2)/t_{1/2} = 0{,}182$ giorno^{-1}. Anomalie di radon sono state osservate settimane prima di eruzioni, anche se la correlazione non è universale.

Monitoraggio Termico

L'aumento di temperatura superficiale riflette maggiore flusso di calore dovuto a intrusione magmatica superficiale.

Satellite IR

MODIS, ASTER, Landsat misurano temperatura superficiale con risoluzione spaziale 30-1000 m. Il flusso radiativo R [W/m²] segue la legge di Stefan-Boltzmann:

$$R = \varepsilon \sigma T^4$$

dove $\varepsilon \approx 0{,}95$ è l'emissività, $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/(m²·K⁴). Per T = 300 K (ambiente):

$$R = 0{,}95 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 300^4 \approx 436 \text{ W/m}^2$$

Per T = 400 K (anomalia termica):

$$R = 0{,}95 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 400^4 \approx 1035 \text{ W/m}^2$$

La differenza $\Delta R \approx 600$ W/m² è facilmente rilevabile. L'anomalia termica integrata su area A fornisce la potenza termica totale:

$$Q_{thermal} = \iint \Delta R(x,y)\, dx\, dy$$

Per A = 1 km² = 10^6 m² con ΔR medio = 100 W/m²:

$$Q_{thermal} = 10^6 \times 100 = 10^8 \text{ W} = 100 \text{ MW}$$

Questo può indicare un lago di lava parzialmente cristallizzato o intrusione superficiale.

Camere termiche forward-looking IR

Usate per misurare temperatura di flussi lavici attivi (1000-1200°C) e fontane di lava. Il flusso di lava Q_{lava} [m³/s] può essere stimato dal flusso radiativo se si conosce lo spessore:

$$Q_{lava} = [\int R\, dA] / [\rho_{lava} c_p (T_{lava} - T_{ambient}) + \rho_{lava} L_{crystallization} \times f_{crystal}]$$

dove $L_{crystallization} \approx 350$ kJ/kg è il calore latente di cristallizzazione.

Integrazione Multiparametrica: Il Caso del Pinatubo 1991

L'eruzione del Pinatubo (Filippine, 15 giugno 1991) è un esempio eccellente di successo del monitoraggio integrato:

Cronologia dei precursori:

- **Aprile 1991**: Prime fumarole e aumento sismicità VT (da 0 a ~20 eventi/giorno)

- **Maggio**: Installazione rete sismica temporanea (7 stazioni). Eventi VT aumentano a ~200/giorno
- **1-3 Giugno**: Primi eventi LP e tremor. Deformazione radiale ~5 cm/settimana (tiltmetri). SO_2 flux ~500 ton/giorno
- **7 Giugno**: Esplosioni freatiche iniziali. Evacuazione zona 10 km
- **9 Giugno**: SO_2 flux >5000 ton/giorno. Tremor continuo. Deformazione accelerata
- **12-14 Giugno**: Tremore crescente. Evacuazione zona 20-30 km (~60.000 persone)
- **15 Giugno**: Eruzione climaterica VEI 6 (10 km³ tephra)

Il sistema di monitoraggio ha permesso evacuazioni tempestive salvando circa 20.000 vite. Senza monitoraggio, la mortalità stimata sarebbe stata 20.000-40.000 persone. Il costo totale del sistema di monitoraggio (~$1,5 milioni) è trascurabile rispetto alle vite salvate e danni evitati.

Tsunami: Generazione e Propagazione

Gli tsunami sono onde gravitazionali superficiali generate da rapidi spostamenti della colonna d'acqua, principalmente da terremoti sottomarini (90% dei casi), frane sottomarine, eruzioni vulcaniche o impatti meteorici.

7.4.1 Generazione da Terremoti

Un terremoto genera tsunami efficacemente quando:

1. Magnitudo M > 7,0 (necessario per displacement significativo)
2. Ipocentro superficiale (h < 50 km)
3. Faglia con componente verticale significativa (thrust o normal)
4. Fondale oceanico

Il displacement verticale del fondale u_z produce una perturbazione iniziale della superficie dell'acqua. Per un terremoto thrust con slip D su faglia di dimensioni L × W inclinata di θ:

$u_{z,max} \approx D \times \sin(\theta)$

Per il terremoto di Tohoku 2011 (M9.0):

- $D \approx 50$ m (slip massimo)
- $\theta \approx 10°$ (dip della faglia)
- $u_{z,max} \approx 50 \times \sin(10°) \approx 8,7$ m

L'area di sollevamento $A \approx L \times W \approx 500 \text{ km} \times 200 \text{ km} = 10^5 \text{ km}^2$. Il volume d'acqua dislocato:

$V \approx u_{z,avg} \times A \approx 4 \text{ m} \times 10^5 \text{ km}^2 = 4 \times 10^{11} \text{ m}^3 = 400 \text{ km}^3$

Questo volume enorme viene ridistribuito, generando onde tsunami.

Equazioni della Propagazione

Gli tsunami in oceano profondo (h > 1000 m) sono onde di shallow-water (acque basse) nonostante la profondità, perché la loro lunghezza d'onda λ ≈ 100-500 km >> h. Le equazioni di shallow-water linearizzate sono:

$\partial\eta/\partial t + \partial(uh)/\partial x = 0$ (continuità) $\partial u/\partial t + g\,\partial\eta/\partial x = 0$ (momento)

dove η(x,t) è l'elevazione della superficie rispetto al livello medio, u(x,t) la velocità orizzontale, h la profondità, g = 9,81 m/s².

Combinando le due equazioni (derivando la prima rispetto a t e la seconda rispetto a x):

$\partial^2\eta/\partial t^2 = gh\,\partial^2\eta/\partial x^2$

Questa è l'equazione d'onda con velocità di fase:

$c = \sqrt{(gh)}$

Per h = 4000 m (profondità oceanica tipica):

$c = \sqrt{(9{,}81 \times 4000)} \approx 198$ m/s ≈ 713 km/h

Questa velocità è paragonabile a quella di un jet! Il periodo T dello tsunami è tipicamente 10-60 minuti, quindi:

$\lambda = cT = 198 \times 600$ s = 118.800 m ≈ 119 km

In acque profonde, l'ampiezza η_0 è piccola (0,5-2 m), rendendo lo tsunami quasi impercettibile dalle navi. L'energia per unità larghezza trasportata dall'onda è:

$E = (1/2)\,\rho\,g\,\eta_0^2\,c$

dove ρ = 1025 kg/m³ è la densità dell'acqua. Per η_0 = 1 m:

$E = 0{,}5 \times 1025 \times 9{,}81 \times 1^2 \times 198 \approx 995.000$ J/m

Per un fronte d'onda largo 1000 km, l'energia totale è:

$E_{total} \approx 10^6$ m $\times\ 10^6$ J/m = 10^{12} J ≈ 0,24 Mton TNT

Questo è piccolo rispetto all'energia sismica totale (~2000 Mton per M9.0), ma concentrato nella colonna d'acqua.

Shoaling e Run-up

Quando lo tsunami si avvicina alla costa, la profondità h diminuisce, causando:

1. **Diminuzione velocità**: $c = \sqrt{(gh)}$ diminuisce
2. **Diminuzione lunghezza d'onda**: λ = cT diminuisce
3. **Aumento ampiezza**: η aumenta per conservazione dell'energia

La conservazione del flusso energetico $E = (1/2)\,\rho\,g\,\eta^2\,c$ richiede:

$\eta_1 \sqrt{h_1} = \eta_2 \sqrt{h_2}$

Questo è il coefficiente di Green. Per $h_1 = 4000$ m, $\eta_1 = 1$ m e $h_2 = 10$ m:

$\eta_2 = \eta_1 \sqrt{(h_1/h_2)} = 1 \times \sqrt{(4000/10)} = 20$ m

L'ampiezza aumenta di un fattore 20! In realtà, effetti non-lineari (rottura dell'onda, attrito sul fondo, topografia complessa) modificano questo valore, ma il concetto di amplificazione per shoaling è corretto.

Il run-up R (massima elevazione verticale raggiunta dall'acqua sulla terra) dipende dalla pendenza della costa β:

$R \approx 2{,}5\, \eta_0 / \sqrt{\beta}$

Per $\eta_0 = 2$ m in oceano aperto e $\beta = 0{,}1$ (pendenza 10%):

$R \approx 2{,}5 \times 2 / \sqrt{0{,}1} \approx 15{,}8$ m

Per il Tohoku 2011, run-up massimi di 40 m sono stati osservati in valli strette a forma di V (effetto di focalizzazione).

Sistemi di Allerta Tsunami

I sistemi di tsunami warning si basano su:

1. Rilevamento Sismico Rapido

Dopo un terremoto costiero con M > 7, l'allerta preliminare viene emessa entro 3-5 minuti basandosi solo su parametri sismici:

- Localizzazione e profondità
- Magnitudo iniziale
- Meccanismo focale (se thrust con slip verticale → alta probabilità tsunami)

La probabilità di tsunami P_tsunami può essere parametrizzata:

$P_tsunami = 1 / [1 + \exp(-a(M - M_0) + b \times h)]$

dove $M_0 \approx 6{,}5$, $a \approx 2$, $b \approx 0{,}05$ km^{-1}. Per M = 8,0, h = 20 km:

$P_tsunami = 1/[1 + \exp(-2 \times 1{,}5 + 0{,}05 \times 20)] = 1/[1 + \exp(-2)] \approx 0{,}88$ (88%)

2. Mareografi Costieri

Sensori di pressione o radar misurano l'arrivo dello tsunami alla costa. Forniscono conferma diretta ma con poco tempo di preavviso per altre località.

3. DART (Deep-ocean Assessment and Reporting of Tsunamis)

Boe ancorate al fondo oceanico con sensori di pressione ad alta precisione (risoluzione 1 mm di variazione del livello del mare). Il DART misura il passaggio dello tsunami in oceano aperto e trasmette via satellite.

La pressione alla profondità h è:

$P = P_{atm} + \rho g (h + \eta)$

Variazioni di pressione $\Delta P = \rho g \eta$ sono misurabili:

$\Delta P = 1025 \times 9{,}81 \times \eta$

Per $\eta = 0{,}01$ m (1 cm):

$\Delta P = 100$ Pa = 1 mbar

Questo è alla soglia di rilevabilità, ma averaging su 15-60 s permette di rilevare onde di ~1 cm. I dati DART vengono assimilati in modelli numerici di propagazione tsunami per previsioni real-time dell'arrivo e ampiezza nelle località costiere.

4. Modelli Numerici

Le equazioni di shallow-water non-lineari sono risolte numericamente su griglie batimetriche ad alta risoluzione (~50-100 m vicino alla costa):

$\partial\eta/\partial t + \partial[(h+\eta)u]/\partial x + \partial[(h+\eta)v]/\partial y = 0$

$\partial u/\partial t + u\,\partial u/\partial x + v\,\partial u/\partial y + g\,\partial\eta/\partial x = -c_f\, u/h$

$\partial v/\partial t + u\,\partial v/\partial x + v\,\partial v/\partial y + g\,\partial\eta/\partial y = -c_f\, v/h$

dove $c_f \approx 0{,}003$ è il coefficiente di attrito sul fondo. I modelli prevedono tempo di arrivo con errore ±2-5 minuti e ampiezza con incertezza fattore 2-3.

Per Tohoku 2011, gli tsunami hanno raggiunto:

- Costa giapponese più vicina: 10-30 minuti
- Hawaii: 7 ore
- California: 10 ore

Le allerte hanno permesso evacuazioni costiere salvando migliaia di vite oltre il Giappone.

Tsunamigenic Efficiency

Non tutti i terremoti grandi generano tsunami significativi. L'efficienza tsunami dipende dalla frazione di energia sismica convertita in energia tsunami:

$\varepsilon_{tsunami} = E_{tsunami} / E_{seismic}$

Empiricamente, terremoti thrust poco profondi hanno $\varepsilon \approx 1$-5%, mentre terremoti strike-slip hanno $\varepsilon < 0{,}1\%$. I "tsunami earthquakes" sono eventi anomali con M relativamente piccola

(~7,5-8,0) ma tsunami sproporzionatamente grandi, interpretati come rotture molto lente ($T_{rupture} \approx 100$ s vs 30 s normale) che generano poco scuotimento sismico ma grande displacement statico del fondale.

Il momento sismico M_0 è:

$$M_0 = \mu D A$$

dove $A = L \times W$ è l'area della faglia. Il volume d'acqua dislocato per faglia thrust verticale:

$$V \approx A \times D \sin(\theta)$$

L'energia potenziale gravitazionale immagazzinata:

$$E_{tsunami} \approx (1/2)\, \rho_{water}\, g\, (V^2/A) = (1/2)\, \rho\, g\, D^2 \sin^2(\theta)\, A$$

Il rapporto:

$$\varepsilon = E_{tsunami}/E_{seismic} = [\rho\, g\, D^2 \sin^2(\theta)\, A] / [M_0^2/(2\mu A)]$$

Sostituendo $M_0 = \mu D A$:

$$\varepsilon = [\rho\, g \sin^2(\theta)] / \mu$$

Con $\rho = 1025$ kg/m³, $g = 9{,}81$ m/s², $\theta = 15°$, $\mu = 30$ GPa:

$$\varepsilon = (1025 \times 9{,}81 \times \sin^2(15°)) / (30 \times 10^9) \approx 2{,}3 \times 10^{-6} = 0{,}00023\%$$

Questo sembra piccolo ma per $M_0 = 5 \times 10^{22}$ N·m (M9.0):

$$E_{seismic} = M_0^2/(2\mu A) \approx 2 \times 10^{17} \text{ J (assumendo } A = 10^5 \text{ km}^2)$$

$$E_{tsunami} = \varepsilon \times E_{seismic} \approx 5 \times 10^{11} \text{ J}$$

Questo è coerente con le stime precedenti (~10^{12}-10^{13} J).

Subsidenza e Rischi Antropici

La subsidenza è l'abbassamento progressivo della superficie terrestre causato da processi naturali (compattazione sedimentaria, tettonica) o antropici (estrazione di fluidi, dissoluzione, mining). A differenza dei rischi improvvisi (terremoti, tsunami), la subsidenza è generalmente lenta (mm-cm/anno) ma può accumulare spostamenti di metri su decenni, causando danni ingenti a infrastrutture.

Meccanismi di Subsidenza

Subsidenza da estrazione di fluidi

L'estrazione di acqua sotterranea, petrolio o gas causa riduzione della pressione dei pori P_f nel reservoir. Il principio di stress effettivo di Terzaghi stabilisce che:

$\sigma'_{eff} = \sigma_{total} - P_f$

dove σ_{total} è lo stress litostatico totale. Quando P_f diminuisce, σ'_{eff} aumenta, causando compattazione del sedimento per riduzione della porosità φ.

La relazione stress-deformazione può essere scritta:

$\Delta\varphi/\varphi_0 = -\beta_c \Delta\sigma'_{eff} = -\beta_c \Delta P_f$

dove β_c è la compressibilità (inverso del modulo di compressione K). Per argille normalmente consolidate, $\beta_c \approx 10^{-7} - 10^{-6}$ Pa^{-1}.

La subsidenza superficiale Δh integra la compattazione lungo lo spessore H del reservoir:

$\Delta h = \int_0^H (\Delta\varphi/\varphi_0)\, dz \approx -\beta_c \Delta P_f H$

Per un acquifero di H = 200 m con ΔP_f = -5 MPa (riduzione di 50 bar) e $\beta_c = 5 \times 10^{-7}$ Pa^{-1}:

$\Delta h = 5 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{6} \times 200 = 0{,}5$ m = 50 cm

Questo è un valore significativo osservato in molte aree urbanizzate.

Caso di Città del Messico

Città del Messico è costruita su sedimenti lacustri argillosi (Lago Texcoco) dello spessore ~100 m con $\varphi_0 \approx 0{,}8$ (80% porosità!). L'estrazione intensiva di acqua sotterranea dal 1900 ha causato:

- Subsidenza cumulativa: ~9 m nel centro città (1900-2000)
- Tasso massimo: ~30 cm/anno (1950-1970)
- Riduzione pressione: $\Delta P_f \approx$ -10 MPa

La compattazione è principalmente irreversibile per argille sovraconsolidate una volta superate la pressione di preconsolidamento. Il danno include:

- Fratturazione edifici
- Rottura tubazioni acqua/gas
- Inversione pendenza fognature
- Allagamenti per subsidenza differenziale

Subsidenza nel Delta del Po

Il Delta del Po (Italia) mostra subsidenza da cause multiple:

- Naturale: compattazione sedimentaria (~2 mm/anno)
- Antropica: estrazione gas metano offshore (~5-15 mm/anno, 1950-1990)
- Ridotta sedimentazione: costruzione dighe sul Po

Subsidenza cumulativa 1950-2000: 1-3 m in alcune aree, portando zone precedentemente emerse sotto il livello del mare, richiedendo sistemi di pompaggio continuo.

Monitoraggio con InSAR

L'interferometria SAR (Synthetic Aperture Radar) satellitare è la tecnica principale per monitorare subsidenza su ampie aree. Due immagini SAR della stessa area acquisite a tempi diversi t_1 e t_2 sono correlate per misurare lo spostamento della superficie nella linea di vista (LOS) del satellite.

La fase interferometrica φ_int è:

$$\varphi_{int} = (4\pi/\lambda) \times d_{LOS} + \varphi_{topography} + \varphi_{atmosphere} + \varphi_{noise}$$

dove $\lambda \approx 5{,}6$ cm è la lunghezza d'onda (banda C, Sentinel-1), d_LOS è il displacement lungo LOS. Rimuovendo contributi topografici (usando DEM) e atmosferici (modelli o averaging temporale), si ottiene:

$$d_{LOS} = (\lambda/4\pi) \times \varphi_{int}$$

Una fase $\varphi = 2\pi$ rad (un fringe completo nelle immagini interferometriche) corrisponde a:

$$d_{LOS} = \lambda/2 = 2{,}8 \text{ cm}$$

La precisione con tecniche di time-series (PSInSAR, SBAS) è ~5 mm/anno in regioni stabili. Per convertire d_LOS in subsidenza verticale:

$$d_{vertical} = d_{LOS} / \cos(\theta_{inc})$$

dove $\theta_{inc} \approx 30\text{-}45°$ è l'angolo di incidenza. Per $\theta_{inc} = 35°$:

$$d_{vertical} = d_{LOS} / \cos(35°) = d_{LOS} / 0{,}819 \approx 1{,}22 \times d_{LOS}$$

Subsidenza Indotta da Geotermica

Lo sfruttamento geotermico mediante estrazione di fluidi caldi può causare subsidenza. Il campo geotermico di Cerro Prieto (Messico) ha mostrato:

- Estrazione: Q ≈ 600 MW_electric → ~1000 kg/s fluido estratto
- Subsidenza: ~10 cm/anno (1977-2000)
- Area: ~200 km²

Il volume di fluido estratto V_extracted e la subsidenza S sono legati da:

$$S \times A = V_{extracted} \times C_{storage}$$

dove C_storage è il coefficiente di immagazzinamento (~10^{-3}-10^{-2} per acquiferi geotermici). Per V_extracted = 1000 kg/s × $3{,}15 \times 10^7$ s/anno = $3{,}15 \times 10^{10}$ kg/anno ≈ 3×10^7 m³/anno, A = 200 km² = 2×10^8 m²:

$$S = (V \times C) / A = (3 \times 10^7 \times 0{,}005) / (2 \times 10^8) = 0{,}00075 \text{ m} = 0{,}75 \text{ mm/anno}$$

Questa stima è molto più bassa del valore osservato (~100 mm/anno), suggerendo che processi aggiuntivi (raffreddamento e contrazione termica del reservoir, dissoluzione minerali) contribuiscono significativamente.

Subsidenza Carsica

In regioni carbonatiche, dissoluzione di calcite ($CaCO_3$) da acque sotterranee acidificate crea vuoti che possono collassare improvvisamente formando sinkholes. La velocità di dissoluzione R [mol/(m²·s)] dipende dalla saturazione:

$R = k \times (1 - \Omega)^n$

dove $\Omega = [Ca^{2+}][CO_3^{2-}] / K_{sp}$ è il rapporto di saturazione, $K_{sp} \approx 10^{-8.3}$ è la costante di solubilità della calcite a 25°C, $k \approx 10^{-4}$ mol/(m²·s) è la costante cinetica, e $n \approx 1$-4 è l'ordine di reazione.

Per acqua completamente insatura ($\Omega = 0$):

$R = k = 10^{-4}$ mol/(m²·s)

Convertendo in tasso di erosione lineare, usando densità calcite $\rho = 2710$ kg/m³, peso molecolare M = 100 g/mol:

$v_{erosion} = (R \times M) / \rho = (10^{-4} \times 0{,}1) / 2710 \approx 3{,}7 \times 10^{-8}$ m/s ≈ 1,2 m/anno

Questo è un massimo teorico; in realtà $\Omega \approx 0{,}3$-$0{,}8$ e k è ridotto da film diffusivi, quindi v ≈ 0,1-1 mm/anno è più realistico. Tuttavia, su 1000 anni, questo corrisponde a 10 cm-1 m di dissoluzione, sufficienti a creare cavità significative. I sinkholes sono particolarmente pericolosi perché improvvisi (collasso in secondi-minuti) e difficili da prevedere. Tecniche di previsione includono:

- Gravimetria: anomalie negative indicano vuoti sotterranei
- Ground Penetrating Radar (GPR): profila strutture superficiali (< 30 m)
- Microgravity: precisione ~10 μGal può rilevare vuoti >10 m³

Mitigazione della Subsidenza

Le strategie di mitigazione includono:

1. Gestione sostenibile estrazione fluidi

Limitare $Q_{extraction} \leq Q_{recharge}$ naturale. Per acquiferi:

$Q_{recharge} = P_{eff} \times A_{recharge}$

dove $P_{eff} \approx 0{,}1$-$0{,}3 \times P_{rainfall}$ è la precipitazione efficace (frazione che infiltra). Per A = 1000 km², P_{eff} = 200 mm/anno:

$Q_{recharge} = 0{,}2 \text{ m} \times 10^9 \text{ m}^2 = 2 \times 10^8 \text{ m}^3\text{/anno} \approx 6 \text{ m}^3\text{/s}$

2. Reiniezione fluidi

Reiniezione di acqua depurata o fluidi geotermici usati mantiene P_f costante. Per campi geotermici:

Q_reiniezione ≥ 0,8-1,0 × Q_estrazione

evita subsidenza significativa ma può indurre sismicità se la reiniezione è troppo rapida vicino a faglie attive.

3. Monitoraggio continuo

InSAR, GPS, livellazione precisione permettono early detection. Soglie di allerta (es. S > 5 cm/anno) triggers investigazioni dettagliate e possibili azioni correttive.

4. Progettazione adattativa

In aree di subsidenza nota, infrastrutture devono essere progettate per tollerare spostamenti differenziali:

- Fondazioni su pali profondi raggiungenti substrato competente
- Giunti di espansione in edifici e ponti
- Sistemi di drenaggio adattabili

Il costo della mitigazione è generalmente molto inferiore ai danni evitati. Per Città del Messico, i danni cumulativi da subsidenza sono stimati >$10 miliardi USD, mentre regolamentazione e gestione sostenibile delle acque sotterranee costerebbe ~$100 milioni/anno. Il monitoraggio e la mitigazione dei rischi geologici rappresentano un'applicazione critica della geofisica alla protezione della società. I progressi nelle ultime decadi sono stati notevoli:

- **Reti sismiche** globali con >10.000 stazioni permanenti e latenza <1 s
- **Satelliti** (Sentinel-1, GPS/GNSS costellazioni) forniscono monitoraggio deformazione continuo globale
- **Sensori geochimici** autonomi in vulcani critici
- **Modelli numerici** ad alta risoluzione girano su supercomputer in tempo reale

Ciononostante, sfide significative rimangono:

1. **Previsione deterministica terremoti**: ancora impossibile con tecnologie attuali
2. **Tsunami generati da frane**: meno compresi e difficili da modellare
3. **Subsidenza a lungo termine**: richiede decadi di dati per caratterizzare completamente
4. **Integrazione multi-hazard**: eventi composti (terremoto → tsunami → eruzioni indotte) necessitano approcci integrati

Le direzioni future includono:

- **Machine learning**: reti neurali profonde per pattern recognition in dati multi-parametrici

- **IoT e sensori distribuiti**: densificazione reti a basso costo
- **Citizen science**: coinvolgimento pubblico nel rilevamento (es. segnalazioni smartphone per scuotimento)
- **Integrazione sociale**: comunicazione rischio efficace e coinvolgimento comunità locali

Il successo ultimo della scienza dei rischi geologici si misura in vite salvate e resilienza delle comunità. L'investimento in monitoring e ricerca continua a dimostrare un ritorno eccezionale: ogni dollaro speso in prevenzione risparmia ~4-7 dollari in danni evitati e perdite ridotte.

Metodi Geofisici Esplorativi

Introduzione ai Metodi Geofisici

I metodi geofisici esplorativi permettono di caratterizzare la struttura e la composizione del sottosuolo senza ricorrere a perforazioni dirette, riducendo drasticamente i costi e i tempi di esplorazione per risorse naturali (idrocarburi, minerali, acqua), caratterizzazione ambientale, e studi di struttura crostale. Questi metodi si basano sulla misura di campi fisici naturali o artificialmente indotti (gravitazionale, magnetico, elettromagnetico, sismico) che dipendono dalle proprietà fisiche delle rocce (densità, magnetizzazione, resistività, velocità elastiche).

Il principio fondamentale è il **problema inverso**: dalle osservazioni dei campi fisici misurati in superficie o in pozzi, si inferisce la distribuzione delle proprietà fisiche nel sottosuolo. Matematicamente:

$$d = G(m)$$

dove **d** è il vettore dei dati osservati, **m** è il vettore dei parametri del modello (distribuzione spaziale delle proprietà fisiche), e G è l'operatore forward che predice i dati dato un modello. Il problema inverso consiste nel trovare **m** che minimizza il misfit tra dati osservati e predetti:

$$\min ||d_{obs} - G(m)||^2 + \lambda R(m)$$

dove il termine $\lambda R(m)$ è la regolarizzazione che incorpora informazione a priori (es. smoothness, vincoli geologici) per stabilizzare la soluzione, poiché i problemi geofisici sono tipicamente ill-posed (soluzione non unica o instabile).

I metodi geofisici si classificano in:

1. **Metodi potenziali** (gravimetria, magnetometria): misurano anomalie di campi statici
2. **Metodi elettromagnetici** (MT, CSEM, GPR, EM induttivo): misurano risposta EM indotta
3. **Metodi sismici** (riflessione, rifrazione, tomografia): misurano propagazione onde elastiche
4. **Metodi radiometrici** (gamma-ray spectrometry): misurano radioattività naturale

Ogni metodo ha risoluzione, profondità di indagine e sensibilità a diverse proprietà fisiche. La chiave per esplorazioni efficaci è l'integrazione multi-metodo che sfrutta la complementarità delle tecniche.

Gravimetria

La gravimetria misura variazioni locali del campo gravitazionale terrestre causate da eterogeneità di densità nel sottosuolo. È un metodo maturo (sviluppato dal 1800s), relativamente economico, e sensibile a contrasti di densità da scala regionale (bacini sedimentari, strutture crostali) a locale (giacimenti minerari, cavità).

Campo Gravitazionale Teorico

L'accelerazione gravitazionale sulla superficie terrestre g dipende da:

1. **Latitudine φ**: per effetto della rotazione terrestre e dell'ellitticità
2. **Elevazione h**: per variazione della distanza dal centro di massa
3. **Topografia circostante**: massa sovrastante o deficit di massa
4. **Eterogeneità sotterranee**: variazioni di densità

Il campo gravitazionale teorico (normale) sulla superficie dell'ellissoide di riferimento è dato dalla formula internazionale di gravità (GRS80/WGS84):

$g_n(\varphi) = g_e (1 + k \sin^2\varphi) / \sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)}$

dove:

- $g_e = 9{,}7803267715$ m/s² (gravità equatoriale)
- $k = 0{,}00193185138639$ (costante gravitazionale)
- $e^2 = 0{,}00669438002290$ (eccentricità quadrata)

Per latitudini moderate, un'approssimazione lineare è:

$g_n(\varphi) \approx 9{,}78031 \times (1 + 0{,}0053024 \sin^2\varphi - 0{,}0000058 \sin^2 2\varphi)$ m/s²

La variazione con latitudine è significativa:

$g_n(0°) = 9{,}78031$ m/s² (equatore) $g_n(45°) = 9{,}80619$ m/s² $g_n(90°) = 9{,}83219$ m/s² (poli)

$\Delta g_{poli-equatore} \approx 52$ mGal (1 Gal = 1 cm/s² = 0,01 m/s²; 1 mGal = 10^{-5} m/s²)

Questo corrisponde a ~0,5% del campo totale e deve essere rimosso per isolare anomalie geologiche di interesse (~0,01-0,001% del campo).

Correzioni Gravimetriche

Per ottenere l'**anomalia di Bouguer**, che riflette le eterogeneità sotterranee, si applicano correzioni sistematiche:

1. Correzione di Latitudine

Rimuove la variazione teorica con latitudine:

$g_{lat_corr} = g_{obs} - g_n(\varphi)$

2. Correzione di Free-Air

Compensa la variazione di g con l'elevazione h sopra l'ellissoide. Derivando la legge di gravitazione universale:

$g(R) = GM/R^2$

$dg/dR = -2GM/R^3 = -2g/R$

Per la Terra, R ≈ 6371 km:

$dg/dh \approx -2g/R = -2 \times 9{,}81 / (6{,}371 \times 10^6) \approx -3{,}08 \times 10^{-6}$ m/s² per metro

= -0,3086 mGal/m ≈ -0,308 mGal/m

Quindi:

$g_{FA_corr} = g_{lat_corr} + 0{,}3086 \times h$ [mGal]

dove h è in metri. Per una stazione a h = 1000 m:

Correzione = +308,6 mGal

3. Correzione di Bouguer

La free-air correction assume assenza di massa tra l'ellissoide e la stazione. In realtà esiste una placca (Bouguer slab) di roccia di spessore h e densità ρ che attrae il gravimetro verso il basso, riducendo g_obs. Questa massa deve essere rimossa.

L'attrazione gravitazionale di una placca infinita di spessore h e densità ρ è:

$g_{slab} = 2\pi G\rho h$

Numericamente, con $G = 6{,}674 \times 10^{-11}$ m³/(kg·s²):

$g_{slab} = 2\pi \times 6{,}674 \times 10^{-11} \times \rho \times h$

Per ρ = 2670 kg/m³ (densità crostale media), h = 1000 m:

$g_{slab} = 2\pi \times 6{,}674 \times 10^{-11} \times 2670 \times 1000 = 1{,}119 \times 10^{-4}$ m/s² = 11,19 mGal

Più in generale:

g_{slab} [mGal] = 0,04192 × ρ[g/cm³] × h[m]

Per ρ = 2,67 g/cm³, h = 1000 m:

$g_{slab} = 0{,}04192 \times 2{,}67 \times 1000 = 111{,}9$ mGal

La correzione di Bouguer sottrae questa attrazione:

$g_{B,corr} = g_{FA,corr} - 2\pi G\rho h$

4. Correzione Topografica

La placca di Bouguer assume topografia piatta. Montagne e valli circostanti causano effetti gravitazionali che devono essere corretti. Montagne sopra il livello della stazione riducono g (massa sopra attrae verso l'alto), valli sotto aumentano g (deficit di massa che avrebbe attirato verso il basso). Entrambi gli effetti richiedono **addizione** alla correzione.

Il calcolo richiede integrazione numerica su zone circolari (metodo di Hammer):

$g_{terrain} = G\rho \sum_i [z_{i,outer} - z_{i,inner} - 2h + 2\sqrt{(r_{i,outer}^2 + (h - z_{i,outer})^2)} - 2\sqrt{(r_{i,inner}^2 + (h - z_{i,inner})^2)}]$

dove le somme sono su anelli concentrici con raggi r_i e elevazioni z_i. Per topografia accidentata, $g_{terrain}$ può raggiungere 10-50 mGal.

Anomalia di Bouguer Completa

$\Delta g_{Bouguer} = g_{obs} - g_n(\varphi) + 0{,}3086h - 0{,}04192\rho h + g_{terrain}$

Questa anomalia riflette le variazioni di densità integrate lungo la verticale sotto la stazione di misura.

Interpretazione delle Anomalie Gravimetriche

Anomalie di Corpi Semplici

Per un corpo sepolto con contrasto di densità $\Delta\rho$ e volume V a profondità z, l'anomalia gravitazionale al di sopra del suo centro è approssimativamente:

$\Delta g \approx G \times (\Delta\rho \times V) / z^2$

Per una sfera di raggio a:

$\Delta g(x) = (4\pi/3)\, G\, \Delta\rho\, a^3 \times z / (x^2 + z^2)^{(3/2)}$

Al centro (x = 0):

$\Delta g_{max} = (4\pi/3)\, G\, \Delta\rho\, a^3 / z^2$

La larghezza a metà ampiezza (half-width) $x_{1/2}$ dove $\Delta g = \Delta g_{max}/2$ è:

$x_{1/2} \approx 1{,}3\, z$

Questa relazione empirica permette di stimare la profondità dalla forma dell'anomalia.

Esempio: Giacimento di Cromite

Un deposito di cromite (ρ = 4500 kg/m³) in roccia ultramafica (ρ = 3200 kg/m³) ha $\Delta\rho$ = 1300 kg/m³. Se il corpo è sferico con raggio a = 50 m a profondità z = 100 m:

$\Delta g_max = (4\pi/3) \times 6{,}674 \times 10^{-11} \times 1300 \times 50^3 / 100^2$

$\Delta g_max = (4\pi/3) \times 6{,}674 \times 10^{-11} \times 1300 \times 125000 / 10000$

$\Delta g_max = 4{,}56 \times 10^{-4}$ m/s² = 4,56 mGal

Questa anomalia è facilmente misurabile con gravimetri moderni (risoluzione ~0,01 mGal).

$x_{1/2} \approx 1{,}3 \times 100 = 130$ m

Anomalie Regionali vs Residuali

Le anomalie di Bouguer contengono componenti a diverse scale:

1. **Regionale**: variazioni smooth a grande lunghezza d'onda (>10 km) dovute a strutture profonde (Moho, bacini sedimentari profondi)
2. **Residuale**: variazioni a corta lunghezza d'onda (<1-10 km) dovute a corpi superficiali

La separazione si effettua mediante:

- **Filtri polinomiali**: fit di superficie polinomiale di grado n (tipicamente 2-3) ai dati
- **Filtri spaziali**: passa-alto/passa-basso nel dominio di Fourier
- **Upward continuation**: continuazione analitica del campo verso l'alto attenua componenti superficiali

La continuazione verso l'alto a quota h è nel dominio di Fourier:

$\Delta g(k, h) = \Delta g(k, 0) \times \exp(-|k|h)$

dove k è il numero d'onda. Alte frequenze (k grande, piccole lunghezze d'onda) sono attenuate esponenzialmente.

Isostasia e Compensazione

L'isostasia è il principio secondo cui la litosfera "galleggia" sull'astenosfera in equilibrio idrostatico. Regioni con topografia elevata (montagne) devono avere radici crostali profonde di bassa densità per compensare il carico superficiale.

Modello di Airy

Assume compensazione locale con crosta di densità uniforme ρ_c = 2800 kg/m³ che galleggia su mantello di densità ρ_m = 3300 kg/m³. L'equilibrio di pressione alla profondità di compensazione richiede:

$\rho_c (t_0 + h + r) = \rho_c\, t_0 + \rho_m\, r$

dove t_0 è lo spessore crostale normale, h l'elevazione topografica, r la profondità della radice sotto t_0. Risolvendo:

$r = (\rho_c / (\rho_m - \rho_c)) \times h$

Numericamente:

$r = (2800 / (3300 - 2800)) \times h = 5{,}6\ h$

Una montagna di h = 3 km richiede radice r = 16,8 km. Lo spessore totale della crosta è:

$t = t_0 + r = 35 + 16{,}8 = 51{,}8$ km

Questo è consistente con osservazioni sismiche sotto catene montuose (Himalaya: t ≈ 70 km).

Modello di Pratt

Assume compensazione mediante variazioni laterali di densità crostale a profondità di compensazione costante:

$\rho_1 (D + h) = \rho_2 D$

dove D è la profondità di compensazione. Risolvendo per ρ_1:

$\rho_1 = \rho_2 D / (D + h)$

Per D = 100 km, h = 3 km, $\rho_2 = 2900$ kg/m³:

$\rho_1 = 2900 \times 100 / 103 = 2816$ kg/m³

La regione elevata ha densità inferiore di $\Delta\rho = 84$ kg/m³.

Anomalie Isostatiche

Se la crosta è in equilibrio isostatico perfetto, l'anomalia di Bouguer dovrebbe essere compensata esattamente dall'effetto della radice o dalla variazione di densità. L'**anomalia isostatica** è:

$\Delta g_{isostatic} = \Delta g_{Bouguer} - \Delta g_{compensation}$

dove $\Delta g_{compensation}$ è calcolata dal modello (Airy o Pratt). Per il modello di Airy:

$\Delta g_{compensation} = -2\pi G (\rho_m - \rho_c) \times r$ + correzioni geometriche

Regioni con $\Delta g_{isostatic} \approx 0$ sono in equilibrio. Anomalie positive indicano sovracompensazione (supporto dinamico, es. upwelling mantellico), anomalie negative indicano sottocompensazione (carico non equilibrato, es. litosfera oceanica giovane).

Esempio: Himalaya

L'Himalaya mostra anomalia di Bouguer fortemente negativa ($\Delta g_B \approx -300$ a -400 mGal) dovuta a:

1. Elevazione topografica $h \approx 5$ km contribuisce $-0{,}04192 \times 2{,}67 \times 5000 \approx -559$ mGal alla correzione di Bouguer
2. Radice crostale $r \approx 30$ km ($t_{totale} \approx 65$-70 km vs $t_0 = 35$ km) riduce ulteriormente il campo

Ma l'anomalia isostatica è solo ≈ -50 a -100 mGal, indicando compensazione quasi completa con leggera sovracompensazione (probabile contributo di anomalie termiche nella litosfera addensata).

Gravimetria nella Prospezione Idrocarburi

I bacini sedimentari mostrano anomalie negative perché i sedimenti ($\rho \approx 2300$-2600 kg/m³) sono meno densi della crosta cristallina circostante ($\rho \approx 2700$-2850 kg/m³). Un bacino di profondità D e contrasto $\Delta\rho$ produce anomalia:

$\Delta g \approx -2\pi G \, \Delta\rho \, D$ (approssimazione placca infinita)

Per $D = 5$ km, $\Delta\rho = -300$ kg/m³:

$\Delta g = -2\pi \times 6{,}674 \times 10^{-11} \times 300 \times 5000 = -6{,}28 \times 10^{-4}$ m/s² $= -62{,}8$ mGal

Le riflessioni sismiche forniscono informazioni strutturali dettagliate, ma la gravimetria:

1. È più economica per survey regionali iniziali
2. Sensibile alla litologia (tipo di sedimento, presenza di sale)
3. Utile per modellare basamento sotto bacini molto profondi dove sismica penetra male

Sale Diapiri

Le intrusioni saline ($\rho_{sale} \approx 2200$ kg/m³) in sedimenti ($\rho_{sedimenti} \approx 2500$ kg/m³) producono anomalie positive locali perché il sale, essendo meno denso, sostituisce sedimenti più densi. Per un domo di sale cilindrico di raggio $a = 500$ m, altezza $h = 2$ km, con top a $z = 1$ km:

$\Delta\rho = 2200 - 2500 = -300$ kg/m³ (negativo, ma il sale *sposta* sedimenti)

Effettivamente, il contrasto rilevante è sale vs sedimenti spostati. L'anomalia è complessa ma tipicamente +1-5 mGal per domi di dimensioni moderate.

Metodi Elettromagnetici

I metodi elettromagnetici (EM) misurano la risposta del sottosuolo a campi EM naturali (magnetotellurico, MT) o artificiali (Controlled-Source EM, CSEM; Ground Penetrating Radar, GPR). Sono sensibili alla resistività elettrica ρ (o conducibilità $\sigma = 1/\rho$), che varia drasticamente (>6 ordini di grandezza) tra diversi materiali geologici.

Equazioni di Maxwell e Diffusione EM

In mezzi conduttivi non magnetici ($\mu = \mu_0$), il campo elettromagnetico soddisfa le equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times E = -\partial B/\partial t = -\mu_0 \, \partial H/\partial t$$

$$\nabla \times H = J + \partial D/\partial t = \sigma E + \varepsilon_0 \, \partial E/\partial t$$

dove E è il campo elettrico, H il campo magnetico, σ la conducibilità, ε_0 la permittività del vuoto.

Per campi armonici $E(t) = E_0 \exp(i\omega t)$, combinando le equazioni:

$$\nabla^2 E = i\omega\mu_0\sigma E + \omega^2\mu_0\varepsilon_0 E$$

Il rapporto tra correnti di conduzione e spostamento è:

$$\sigma / (\omega\varepsilon_0) = \sigma / (2\pi f \times 8{,}854 \times 10^{-12})$$

Per $f = 1$ Hz, $\sigma = 0{,}01$ S/m (sedimenti):

$$\sigma/(\omega\varepsilon_0) = 0{,}01 / (2\pi \times 1 \times 8{,}854 \times 10^{-12}) \approx 1{,}8 \times 10^{8} >> 1$$

Le correnti di conduzione dominano e l'equazione si semplifica (approssimazione quasi-statica):

$$\nabla^2 E \approx i\omega\mu_0\sigma E$$

Questa è l'equazione di diffusione (non onda!) per il campo EM. Definendo il numero d'onda complesso:

$$k^2 = i\omega\mu_0\sigma = i\omega\mu_0/\rho$$

La parte reale e immaginaria sono uguali:

$$k = (1 + i)\sqrt{(\omega\mu_0\sigma/2)} = (1 + i)/\delta$$

dove δ è la **skin depth** (profondità di penetrazione):

$$\delta = \sqrt{(2/(\omega\mu_0\sigma))} = \sqrt{(\rho/(\pi f\mu_0))}$$

Numericamente, con $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m:

$$\delta\,[\mathrm{m}] = 503 \times \sqrt{(\rho[\Omega\cdot\mathrm{m}] / f[\mathrm{Hz}])}$$

Esempi:

1. Acqua di mare ($\rho = 0{,}3\ \Omega\cdot$m) a $f = 1$ Hz: $\delta = 503 \times \sqrt{(0{,}3/1)} = 275$ m

2. Sedimenti ($\rho = 10\ \Omega\cdot m$) a $f = 100$ Hz: $\delta = 503 \times \sqrt{(10/100)} = 159$ m
3. Basamento cristallino ($\rho = 10000\ \Omega\cdot m$) a $f = 0{,}001$ Hz: $\delta = 503 \times \sqrt{(10000/0{,}001)} = 50{,}3$ km

La skin depth controlla la profondità di indagine: frequenze più basse penetrano più in profondità. Questo è il principio del **sounding EM** (soundings a più frequenze per profili di resistività con la profondità).

Magnetotellurico (MT)

Il metodo magnetotellurico utilizza variazioni naturali del campo geomagnetico (originate da correnti ionosferiche e tempeste magnetiche) come sorgente EM. Le frequenze utili vanno da ~10^{-4} Hz (periodi di ore) a ~10^{4} Hz.

Impedenza MT

Per un'onda EM piana incidente verticalmente su una Terra stratificata orizzontalmente, i campi elettrici e magnetici orizzontali alla superficie sono legati dall'**impedenza MT**:

$$E_x = Z_{xy} H_y \quad E_y = -Z_{yx} H_x$$

dove Z è un tensore 2×2. Per un semispazio omogeneo:

$$Z = \sqrt{(i\omega\mu_0/\sigma)} = \sqrt{(i\omega\mu_0\rho)} = (1+i)\sqrt{(\omega\mu_0\rho/2)}$$

Il modulo dell'impedenza è:

$$|Z| = \sqrt{(\omega\mu_0\rho)}$$

Quindi la resistività apparente è:

$$\rho_{app} = |Z|^2 / (\omega\mu_0) = |E|^2 / (\omega\ \mu_0\ |H|^2)$$

In unità pratiche:

$$\rho_{app}\ [\Omega\cdot m] = 0{,}2 \times T[s] \times |E/H|^2 \quad [\text{dove E in mV/km, H in nT}]$$

La fase di Z è:

$$\varphi = \arg(Z) = \arctan(\mathrm{Im}(Z)/\mathrm{Re}(Z))$$

Per semispazio omogeneo, $\varphi = 45°$. Deviazioni da 45° indicano eterogeneità.

Profondità di Investigazione

La profondità di investigazione è approssimativamente:

$$z_{inv} \approx \delta = 503\ \sqrt{(\rho_{app} / f)}$$

Per sondaggi profondi (mantello), si usano periodi T = 1000-10000 s (f = 0,001-0,0001 Hz). Con $\rho_{app} \approx 100$ Ω·m (mantello):

$z_{inv} = 503 \sqrt{(100/0{,}001)} = 503 \times 316 \approx 159$ km

Interpretazione

La curva $\rho_{app}(T)$ riflette la struttura di resistività con la profondità. Per una terra a due strati (resistività ρ_1, ρ_2; spessore primo strato h_1):

- A periodi brevi ($T << 2\pi\mu_0\sigma_1 h_1^2$): $\rho_{app} \to \rho_1$
- A periodi lunghi ($T >> 2\pi\mu_0\sigma_1 h_1^2$): $\rho_{app} \to \rho_2$

L'interpretazione quantitativa richiede inversione numerica dei dati per ottenere un modello ρ(z).

Applicazioni MT

1. **Esplorazione geotermica**: fluidi idrotermali riducono ρ da 100-1000 Ω·m (rocce secche) a 1-10 Ω·m
2. **Struttura crostale-mantellica**: transizione crosta-mantello, LAB (Lithosphere-Asthenosphere Boundary)
3. **Bacini sedimentari**: sedimenti argillosi (ρ = 1-20 Ω·m) vs evaporiti (ρ > 100 Ω·m)
4. **Faglie e zone di frattura**: alterazione e presenza di fluidi riducono ρ

Esempio: LAB Detection

La litosfera mantellica ha ρ ≈ 100-1000 Ω·m (olivina anidra). L'astenosfera ha ρ ≈ 10-50 Ω·m per:

- Temperatura più alta (aumenta conducibilità ionica)
- Fusione parziale (~0,1-1%)
- Presenza di H_2O anche in tracce

La LAB a z ≈ 80-150 km produce un forte contrasto di resistività rilevabile con MT a periodi T > 1000 s.

Controlled-Source EM (CSEM)

Nei metodi CSEM, una sorgente artificiale (dipolo elettrico o magnetico) genera il campo primario. Eterogeneità di resistività nel sottosuolo causano campi secondari misurati da ricevitori.

CSEM Marino

Sviluppato per esplorazione offshore di idrocarburi. Un dipolo elettrico orizzontale trainato sul fondale (current source ~1000 A, lunghezza ~100 m) emette segnali a bassa frequenza (0,1-10 Hz). Ricevitori sul fondale misurano i campi elettrici e magnetici.

Gli idrocarburi (olio, gas) sono altamente resistivi (ρ ≈ 20-2000 Ω·m) rispetto ai sedimenti circostanti saturi di acqua salata (ρ ≈ 1-2 Ω·m). Un reservoir di spessore h produce anomalia nel campo EM.

Risposta del Semispazio

Per un dipolo elettrico orizzontale in semispazio omogeneo, il campo elettrico a distanza r è:

$E_r \propto (I L / r^3) \times \exp(-r/\delta) \times [1 + r/\delta + (r/\delta)^2/3]$

dove I è la corrente, L la lunghezza del dipolo, δ la skin depth. A distanze r > 3δ (far-field), domina il termine esponenziale:

$E_r \propto \exp(-r/\delta)$

L'attenuazione è drastica: E diminuisce di un fattore e ≈ 2,7 ogni distanza δ.

Per acqua di mare (ρ = 0,3 Ω·m), f = 1 Hz:

$\delta = 503 \sqrt{(0,3/1)} \approx 275$ m

A distanza r = 2 km:

$E(2\text{ km})/E(0,1\text{ km}) \approx \exp[-(2000-100)/275] \approx \exp(-6,9) \approx 0,001$

Il segnale è attenuato di un fattore 1000. Se uno strato resistivo (reservoir) è presente, δ aumenta localmente, riducendo l'attenuazione e creando un'anomalia positiva nel campo misurato.

Sensibilità al Reservoir

Un reservoir di resistività ρ_{res} = 100 Ω·m, spessore h = 50 m, a profondità z = 1500 m sotto il fondale (profondità acqua 1000 m, reservoir a 2500 m sotto livello mare) in sedimenti con ρ_{sed} = 1 Ω·m produce anomalia:

$\Delta \log_{10}(\rho_{app}) \approx (\rho_{res} - \rho_{sed})/\rho_{sed} \times (h/\delta_{sed}) \times$ funzione geometrica

$\delta_{sed} = 503 \sqrt{(1/1)} \approx 503$ m

$\Delta \log_{10}(\rho_{app}) \approx 99 \times (50/503) \times 0,1 \approx 1$

L'anomalia è sostanziale (aumento di un ordine di grandezza nella resistività apparente). Tuttavia, il rapporto segnale/rumore e la risoluzione verticale dipendono criticamente dalla geometria sorgente-ricevitore e frequenze usate.

Vantaggi e Limitazioni CSEM

Vantaggi:

- Sensibilità diretta a resistività (idrocarburi vs acqua)
- Complementare alla sismica (che rileva contrasti di impedenza acustica)

Limitazioni:

- Richiede forte contrasto $\rho_{res}/\rho_{sed} > 10$
- Risoluzione limitata (difficile distinguere spessore da resistività)
- Costo elevato per deployment offshore

Ground Penetrating Radar (GPR)

Il GPR usa frequenze molto alte (10 MHz - 2 GHz) dove il regime è di propagazione ondulatoria, non diffusiva. Applicabile solo a mezzi a bassa conducibilità ($\rho > 100\ \Omega\cdot m$): ghiaccio, sabbia secca, calcare.

La velocità di propagazione è:

$$v = c/\sqrt{\varepsilon_r} \approx 3 \times 10^8 / \sqrt{\varepsilon_r}\ [m/s]$$

dove ε_r è la costante dielettrica relativa:

- Aria: $\varepsilon_r = 1$
- Acqua: $\varepsilon_r = 81$
- Ghiaccio: $\varepsilon_r = 3\text{-}4$
- Rocce secche: $\varepsilon_r = 4\text{-}10$
- Rocce umide: $\varepsilon_r = 10\text{-}40$

Per rocce secche ($\varepsilon_r \approx 6$):

$$v = 3 \times 10^8 / \sqrt{6} \approx 1{,}22 \times 10^8\ m/s = 0{,}122\ m/ns$$

L'attenuazione è:

$$\alpha\ [dB/m] \approx 1{,}69 \times f[MHz] / \sqrt{\varepsilon_r} \times \sqrt{(\sigma[mS/m])}$$

Per rocce con $\sigma = 1$ mS/m, $\varepsilon_r = 6$, f = 100 MHz:

$$\alpha = 1{,}69 \times 100 / \sqrt{6} \times \sqrt{1} = 69\ dB/m$$

L'attenuazione di 69 dB/m significa che il segnale diminuisce di 20 dB (fattore 10) ogni 0,29 m. La profondità di penetrazione è limitata a pochi metri in sedimenti conduttivi, fino a ~30 m in rocce molto resistive come ghiaccio o calcare secco.

Risoluzione GPR

La risoluzione verticale (capacità di separare riflettori vicini) è:

$$\Delta z \approx v/(4f) = \lambda/4$$

Per f = 100 MHz, v = 0,12 m/ns:

$$\lambda = v/f = 0{,}12 \times 10^9 / (100 \times 10^6) = 1{,}2\ m$$

$$\Delta z = 1{,}2/4 = 0{,}3\ m$$

Frequenze più alte danno migliore risoluzione ma minore penetrazione (trade-off fondamentale).

Applicazioni GPR

- Archeologia: rilevamento strutture sepolte
- Geotecnica: spessore pavimentazione stradale, localizzazione cavità
- Idrogeologia: livello falda freatica (forte riflettore per alto contrasto ε_r)
- Glaciologia: stratigrafia interna ghiacciai, spessore calotte

Prospezione Sismica

La prospezione sismica è il metodo geofisico più importante per l'esplorazione di idrocarburi. Si basa sulla generazione di onde elastiche artificiali (esplosivi, vibroseis, air-gun) e registrazione delle onde riflesse o rifratte da interfacce con contrasto di impedenza acustica $Z = \rho v$.

Onde Elastiche e Impedenza Acustica

Le onde elastiche soddisfano l'equazione d'onda:

$\partial^2 u/\partial t^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho \times \nabla^2 u$ (onde P)

$\partial^2 u/\partial t^2 = \mu/\rho \times \nabla^2 u$ (onde S)

dove λ e μ sono i parametri di Lamé. Le velocità sono:

$v_P = \sqrt{[(\lambda + 2\mu)/\rho]} = \sqrt{[(K + 4\mu/3)/\rho]}$

$v_S = \sqrt{[\mu/\rho]}$

L'**impedenza acustica** è:

$Z = \rho v_P$

Il coefficiente di riflessione a incidenza normale tra due strati è:

$R = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$

Per $Z_1 = 3000$ kg/(m²·s) (shale), $Z_2 = 5000$ kg/(m²·s) (sandstone):

$R = (5000 - 3000)/(5000 + 3000) = 2000/8000 = 0{,}25$

Il 25% dell'energia incidente è riflessa, 75% è trasmessa ($T = 1 - R^2 \approx 0{,}94$ per energia).

Il coefficiente di riflessione è proporzionale al contrasto:

$R \approx (1/2) \times \Delta Z/Z_{avg} = (1/2) \times [(\Delta\rho/\rho_{avg}) + (\Delta v/v_{avg})]$

Questo mostra che la sismiche risponde sia a contrasti di densità sia di velocità.

Sismica a Rifrazione

La rifrazione sismica usa il principio che le onde rifratte criticamente lungo interfacce viaggiano a velocità dello strato inferiore e ritornano in superficie. Per uno strato di spessore h_1 e velocità v_1 sopra un semispazio con velocità $v_2 > v_1$, il tempo di arrivo della rifrazione è:

$t_{refr} = x/v_2 + 2h_1 \cos(\theta_c)/v_1$

dove $\theta_c = \arcsin(v_1/v_2)$ è l'angolo critico. Il tempo intercetta a $x = 0$ è:

$t_i = 2h_1 \cos(\theta_c)/v_1 = 2h_1 \sqrt{(v_2^2 - v_1^2)}/(v_1 v_2)$

L'onda diretta ha tempo $t_{dir} = x/v_1$. Le due dromocrone si intersecano alla distanza crossover:

$x_{cross} = 2h_1 / \sqrt{[(v_2/v_1)^2 - 1]} \times (v_2/v_1)$

Per $v_1 = 2000$ m/s, $v_2 = 4000$ m/s, $h_1 = 50$ m:

$x_{cross} = 2 \times 50 / \sqrt{[4 - 1]} \times 2 = 100 \times 2/\sqrt{3} \approx 115{,}5$ m

Per $x > x_{cross}$, l'onda rifratta arriva prima dell'onda diretta.

Interpretazione Multistrato

Per n strati, la velocità di ogni strato v_i è determinata dalla pendenza della dromocrona:

$1/v_i = \Delta t/\Delta x$

Lo spessore si calcola ricorsivamente dagli intercetti temporali. Questo metodo richiede che $v_1 < v_2 < v_3 < \ldots$ (velocità crescenti con profondità), limitando l'applicabilità in presenza di inversioni di velocità (strati a bassa velocità sotto strati veloci).

Applicazioni Rifrazione

- Ingegneria: spessore soil, profondità bedrock
- Idrogeologia: livello falda (v aumenta per saturazione)
- Esplorazione poco profonda: basamento sotto cover sedimentario

Sismica a Riflessione

La sismica a riflessione è il workhorse per l'esplorazione profonda degli idrocarburi. Genera immagini dettagliate del sottosuolo fino a 10+ km di profondità con risoluzione verticale ~10-50 m.

Tempo di Riflessione

Per un riflettore orizzontale a profondità z, il tempo di riflessione two-way time (TWT) è:

$t = 2z/v$

Per geometria offset (sorgente-ricevitore separati di distanza x), la traiettoria è iperbolica:

$t(x) = \sqrt{[t_0^2 + (x/v_{rms})^2]}$

dove $t_0 = 2z/v$ è il tempo a zero offset e v_{rms} è la velocità RMS (root-mean-square) mediata verticalmente:

$v_{rms} = \sqrt{[(\sum_i v_i^2 t_i) / (\sum_i t_i)]}$

Normal Moveout (NMO)

Il moveout normale è la differenza tra $t(x)$ e t_0:

$\Delta t_{NMO} = t(x) - t_0 \approx x^2/(2v_{rms}^2 t_0)$

(approssimazione per $x << v_{rms} t_0$). La correzione NMO allinea le riflessioni a diversi offset, permettendo lo stacking delle tracce per aumentare il rapporto segnale/rumore.

Migrazione

I riflettori inclinati o irregolari appaiono dislocati nelle sezioni sismiche tempo-distanza. La **migrazione** riposiziona i riflettori nella loro posizione geometrica vera. Per un riflettore inclinato di angolo θ alla profondità verticale z sotto il punto medio, l'evento riflesso appare a distanza orizzontale:

$x_{apparent} = z \tan(\theta)$

La migrazione corregge spostando il riflettore di:

$\Delta x = -x_{apparent} = -z \tan(\theta)$

Per $\theta = 30°$, $z = 2000$ m:

$\Delta x = -2000 \times \tan(30°) = -2000 \times 0{,}577 = -1154$ m

Lo spostamento è significativo! La migrazione è essenziale per interpretazione strutturale corretta.

Risoluzione Sismica

La risoluzione verticale (criterio di Rayleigh) è:

$\Delta z_{min} \approx \lambda/4 = v/(4f_{dom})$

dove f_{dom} è la frequenza dominante. Per $v = 3000$ m/s, $f_{dom} = 40$ Hz (tipica per sismiche profonde):

$\Delta z_{min} = 3000/(4 \times 40) = 18{,}75$ m

Riflettori separati da < 19 m non sono risolvibili. Per frequenze più alte ($f_{dom} \approx 100$-200 Hz in sismica shallow), la risoluzione migliora a ~5-10 m.

La risoluzione orizzontale dipende dalla **zona di Fresnel** (regione che contribuisce alla riflessione):

$r_{Fresnel} = \sqrt{(\lambda z/2)} \approx \sqrt{(v z / 2f_{dom})}$

Per $z = 2000$ m, $v = 3000$ m/s, $f = 40$ Hz:

$r_{Fresnel} = \sqrt{(3000 \times 2000 / (2 \times 40))} = \sqrt{75000} \approx 274$ m

La dimensione laterale minima risolvibile è ~300 m. La migrazione può ridurre questo a ~λ/2 in condizioni ottimali.

Analisi AVO (Amplitude Versus Offset)

A incidenza non normale, il coefficiente di riflessione dipende dall'angolo θ:

$R(\theta) \approx R(0) + [R(0) + (\Delta\sigma/\sigma_{avg})] \sin^2\theta + (1/2)(\Delta v_P/v_{P,avg}) (\tan^2\theta - \sin^2\theta)$

dove σ è il rapporto di Poisson. Per interfacce gas-sand/shale, Δσ è fortemente negativo perché il gas riduce v_P drasticamente ma v_S molto meno, quindi:

$\sigma_{gas} = (v_P^2 - 2v_S^2)/(2v_P^2 - 2v_S^2)$

diminuisce. Questo produce anomalie AVO caratteristiche:

Classe II AVO (Bright Spot)

- R(0) positivo (sandstone più veloce di shale sovrastante)
- R(θ) diventa più positivo con θ (increase with offset)

Classe III AVO

- R(0) negativo (sandstone meno veloce di shale)
- R(θ) diventa più negativo con θ (magnitude increases)

Classe IV AVO

- R(0) negativo piccolo
- R(θ) diventa positivo a θ intermedi (polarity reversal)

L'analisi AVO è critica per discriminare gas-sand da brine-sand (che non mostrano anomalia AVO) senza necessità di perforazione.

Esempio Quantitativo

Shale: $v_{P1} = 2500$ m/s, $v_{S1} = 1200$ m/s, $\rho_1 = 2400$ kg/m³ Gas-sand: $v_{P2} = 2200$ m/s, $v_{S2} = 1150$ m/s, $\rho_2 = 2100$ kg/m³

Impedenze: $Z_1 = 2400 \times 2500 = 6{,}0 \times 10^6$ kg/(m²·s) $Z_2 = 2100 \times 2200 = 4{,}62 \times 10^6$ kg/(m²·s)

$R(0) = (4{,}62 - 6{,}0)/(4{,}62 + 6{,}0) = -1{,}38/10{,}62 = -0{,}13$

Rapporti di Poisson: $\sigma_1 = (2500^2 - 2 \times 1200^2)/(2 \times 2500^2 - 2 \times 1200^2) = 0,29$ $\sigma_2 = (2200^2 - 2 \times 1150^2)/(2 \times 2200^2 - 2 \times 1150^2) = 0,14$

$\Delta\sigma = 0,14 - 0,29 = -0,15$

A $\theta = 30°$:

$R(30°) \approx -0,13 + [-0,13 - 0,15] \times \sin^2(30°) \approx -0,13 - 0,28 \times 0,25 \approx -0,20$

L'ampiezza aumenta (diventa più negativa) con offset, caratteristica di gas.

Sismica 4D (Time-Lapse)

Acquisizioni sismiche ripetute sullo stesso campo durante la produzione rivelano cambiamenti di impedenza acustica dovuti a:

- Diminuzione pressione (aumenta v_P)
- Variazione saturazione fluidi (sostituzione olio/gas con acqua)
- Variazione temperatura (iniezione steam per heavy oil)

La sensibilità a pressione è quantificata dal modulo poroelastico. Per sandstone, una diminuzione di pressione $\Delta p = -10$ MPa causa aumento di velocità:

$\Delta v_P/v_P \approx +0,01\text{-}0,03$ (1-3%)

Per saturazione, la sostituzione gas → acqua:

$\Delta v_P/v_P \approx +0,10\text{-}0,30$ (10-30%)

L'effetto di saturazione domina. Differenze nelle sezioni sismiche (repeated - baseline) mostrano le zone dove l'acqua iniettata ha spostato gli idrocarburi, guidando strategie di produzione ottimali (posizionamento pozzi infill, identificazione bypassed zones).

Petrophysics: Relazioni tra Proprietà Fisiche

La petrophysics studia le relazioni tra proprietà fisiche misurabili (velocità, densità, resistività, porosità) e proprietà petrografiche/litologiche. Queste relazioni sono essenziali per interpretare dati geofisici in termini geologici.

Porosità e Densità

La porosità φ è la frazione di volume occupata da pori. La densità bulk è:

$\rho_{bulk} = \varphi \rho_{fluid} + (1 - \varphi) \rho_{matrix}$

Per sandstone con $\varphi = 0,30$, $\rho_{matrix} = 2650$ kg/m³ (quarzo), $\rho_{fluid} = 1000$ kg/m³ (acqua):

$\rho_{bulk} = 0,30 \times 1000 + 0,70 \times 2650 = 300 + 1855 = 2155$ kg/m³

Invertendo per φ:

φ = (ρ_matrix - ρ_bulk)/(ρ_matrix - ρ_fluid)

Questa relazione permette di stimare φ da log di densità (gamma-gamma log) in pozzi.

Velocità Sismica e Porosità

Per mezzi porosi, la velocità dipende da porosità, saturazione fluidi, e geometria dei pori. Diverse equazioni empiriche e teoriche esistono:

Equazione di Wyllie (Time-Average)

1/v_P = φ/v_fluid + (1-φ)/v_matrix

Per sandstone saturo d'acqua, φ = 0,30, v_matrix = 5500 m/s (quarzo), v_fluid = 1500 m/s:

1/v_P = 0,30/1500 + 0,70/5500 = 0,0002 + 0,000127 = 0,000327

v_P = 1/0,000327 ≈ 3058 m/s

Questa equazione è approssimativa e vale meglio per rocce consolidate con pori non connessi.

Equazione di Gassmann

Più rigorosa, basata su teoria poroelastica. Il modulo di incomprimibilità della roccia satura K_sat è:

K_sat = K_dry + [α² K_fl] / [φ/K_fl + (α-φ)/K_s]

dove:

- K_dry = modulo della roccia secca
- K_fl = modulo del fluido
- K_s = modulo della matrice solida
- α = 1 - K_dry/K_s = parametro di Biot

Per sandstone con K_s = 37 GPa (quarzo), φ = 0,25, K_dry = 10 GPa, K_fl = 2,25 GPa (acqua):

α = 1 - 10/37 = 0,73

K_sat = 10 + [0,73² × 2,25] / [0,25/2,25 + (0,73-0,25)/37]

K_sat = 10 + 1,20 / [0,111 + 0,013] = 10 + 1,20/0,124 = 10 + 9,68 ≈ 19,7 GPa

Il modulo di taglio non cambia con fluidi: μ_sat = μ_dry = 10 GPa (assunto).

v_P,sat = √[(K_sat + 4μ/3)/ρ_sat]

ρ_sat = 0,25 × 1000 + 0,75 × 2650 = 2238 kg/m³

$v_{P,sat} = \sqrt{[(19,7 + 13,33)/2238]} \times 10^3 = \sqrt{(33030/2238)} \times 10^3 \approx 3840$ m/s

Sostituzione di Fluidi

Gassmann permette di predire l'effetto di sostituzione acqua → gas. Per gas, $K_{gas} \approx 0,01$ GPa << K_{acqua}:

$K_{sat,gas} = 10 + [0,73^2 \times 0,01] / [0,25/0,01 + 0,48/37]$

$K_{sat,gas} = 10 + 0,0053 / [25 + 0,013] \approx 10 + 0,0002 \approx 10,0$ GPa

La differenza è piccola perché φ/K_{fl} domina il denominatore quando K_{fl} è piccolo. Ma l'effetto su v_P è significativo:

$\rho_{sat,gas} = 0,25 \times 100 + 0,75 \times 2650 = 2012$ kg/m³ (gas density ~100 kg/m³)

$v_{P,gas} = \sqrt{[(10 + 13,33)/2012]} \times 10^3 \approx 3405$ m/s

$\Delta v_P = 3405 - 3840 = -435$ m/s (riduzione del 11%)

Questa riduzione è alla base del "gas effect" osservato in sismica.

Velocità e Pressione Effettiva

La velocità aumenta con pressione di confinamento (compaction) e diminuisce con pressione dei pori (riduce stress effettivo). Empiricamente:

$v_P(\sigma') = v_{P,\infty} \times [1 - \exp(-\sigma'/C)]$

dove $\sigma' = P_{conf} - P_{pore}$ è lo stress effettivo, $v_{P,\infty}$ è la velocità a stress infinito, e $C \approx$ 10-20 MPa è una costante.

Per sandstone non consolidato:

$v_{P,\infty} \approx 4500$ m/s, $C = 15$ MPa

A $\sigma' = 15$ MPa:

$v_P = 4500 \times [1 - \exp(-1)] = 4500 \times 0,632 \approx 2844$ m/s

A $\sigma' = 45$ MPa:

$v_P = 4500 \times [1 - \exp(-3)] = 4500 \times 0,950 \approx 4275$ m/s

L'aumento è ~50% tra 15 e 45 MPa. Questo spiega perché rocce in outcrop (zero confining pressure) hanno velocità molto inferiori alle stesse rocce in situ a km di profondità.

Resistività e Saturazione: Legge di Archie

La resistività elettrica delle rocce dipende criticamente dalla salinità del fluido nei pori e dal grado di saturazione. La **legge di Archie** (empirica ma ampiamente usata) è:

$\rho_{rock} = a \rho_{water} \varphi^{-m} S_w^{-n}$

dove:

- $a \approx 1$ = costante geometrica (tortuosity factor)
- $m \approx 2$ = esponente di cementazione
- $n \approx 2$ = esponente di saturazione
- S_w = frazione di saturazione acqua ($S_w = 1 - S_{hc}$ per idrocarburi)

Per sandstone pulito con $\varphi = 0{,}25$, $S_w = 0{,}50$ (50% acqua, 50% olio), $\rho_{water} = 0{,}05\ \Omega\cdot m$ (brine salata):

$\rho_{rock} = 1 \times 0{,}05 \times 0{,}25^{-2} \times 0{,}50^{-2} = 0{,}05 \times 16 \times 4 = 3{,}2\ \Omega\cdot m$

Se $S_w = 1$ (100% acqua):

$\rho_{rock} = 0{,}05 \times 16 \times 1 = 0{,}8\ \Omega\cdot m$

Il reservoir con idrocarburi ha resistività **4 volte maggiore** del reservoir saturo d'acqua. Questo contrasto è sfruttato dai log elettrici (resistivity logs) per identificare pay zones.

Fattore di Formazione

Il fattore di formazione F è definito come:

$F = \rho_{rock} / \rho_{water}|_{S_w=1} = a \varphi^{-m}$

Per sandstone consolidato tipico, $F = \varphi^{-2}$. A $\varphi = 0{,}20$:

$F = 0{,}20^{-2} = 25$

La resistività della roccia completamente satura d'acqua è 25 volte la resistività dell'acqua stessa.

Indice di Resistività

L'indice di resistività I è:

$I = \rho_{rock}(S_w) / \rho_{rock}(S_w=1) = S_w^{-n}$

Invertendo per S_w:

$S_w = (\rho_{rock}(S_w=1) / \rho_{rock})^{1/n} = (I)^{-1/n}$

Questa relazione permette di calcolare la saturazione di idrocarburi dai log di resistività in pozzi, fondamentale per valutazione di reservoir.

Relazioni Velocità-Densità

Gardner ha proposto una relazione empirica ampiamente usata:

$\rho = a\, v_P^b$

dove $a \approx 0{,}31$ (unità: g/cm³, km/s) e $b \approx 0{,}25$ per diverse litologie. Equivalentemente:

$\rho\ [g/cm^3] = 0{,}31 \times [v_P\ (km/s)]^{0{,}25}$

Per $v_P = 3$ km/s:

$\rho = 0{,}31 \times 3^{0{,}25} = 0{,}31 \times 1{,}316 \approx 2{,}22\ g/cm^3$

Per $v_P = 5$ km/s:

$\rho = 0{,}31 \times 5^{0{,}25} = 0{,}31 \times 1{,}495 \approx 2{,}52\ g/cm^3$

Questa relazione è utile per convertire modelli di velocità sismica in modelli di densità per interpretazioni gravimetriche integrate, o per inversione sismica che richiede ρ come parametro.

Mudrock Line

Per shales (mudrock), una relazione lineare empirica tra velocità e densità esiste:

$v_P = c_1\, \rho - c_2$

Con $c_1 \approx 2000$-2500 m·cm³/(s·g), $c_2 \approx 3000$-4000 m/s. Per $\rho = 2{,}4$ g/cm³:

$v_P = 2500 \times 2{,}4 - 3500 = 6000 - 3500 = 2500$ m/s

Deviazioni dalla mudrock line indicano litologie diverse (sandstone, carbonati) o anomalie di fluidi (overpressure).

Crossplots e Identificazione Litologica

Le diverse litologie occupano regioni distinte negli spazi (v_P, ρ), (v_P/v_S, v_P), o (φ, v_P). I **crossplots** di questi parametri, ottenuti da log di pozzo o inversione sismica, permettono identificazione litologica quantitativa.

Crossplot v_P - v_S

- Sandstone: $v_P/v_S \approx 1{,}6$-$1{,}8$
- Shale: $v_P/v_S \approx 1{,}8$-$2{,}2$
- Carbonati: $v_P/v_S \approx 1{,}8$-$2{,}0$
- Gas-sand: $v_P/v_S \approx 1{,}5$-$1{,}7$ (gas riduce v_P più di v_S)

Il rapporto v_P/v_S è legato al rapporto di Poisson:

$\sigma = (v_P^2/v_S^2 - 2) / (2v_P^2/v_S^2 - 2)$

Per $v_P/v_S = 1{,}7$:

$\sigma = (1{,}7^2 - 2)/(2 \times 1{,}7^2 - 2) = (2{,}89 - 2)/(5{,}78 - 2) = 0{,}89/3{,}78 \approx 0{,}24$

Per $v_P/v_S = 2,0$:

$\sigma = (4 - 2)/(8 - 2) = 2/6 = 0,33$

Gas-sand ha σ basso (~0,15-0,25), shale ha σ alto (~0,30-0,40).

Lambda-Mu-Rho (LMR)

Combinazioni elastiche sono usate per discriminare litologia e fluidi:

$\lambda\rho = \rho(v_P^2 - 2v_S^2)$ $\mu\rho = \rho v_S^2$

Il crossplot ($\lambda\rho$, $\mu\rho$) separa efficacemente:

- Shale: alto $\lambda\rho$, medio $\mu\rho$
- Brine-sand: medio $\lambda\rho$, alto $\mu\rho$
- Gas-sand: basso $\lambda\rho$, alto $\mu\rho$

Questa analisi quantitativa permette mappatura probabilistica di facies sismiche.

Integrazione Multi-Metodo e Interpretazione

L'interpretazione geofisica moderna integra metodi complementari per ridurre ambiguità e vincolare modelli geologici. Ogni metodo ha sensibilità ottimale a particolari proprietà:

Metodo	Proprietà	Profondità	Risoluzione
Gravimetria	Densità ρ	0-100 km	~1 km
Magnetometria	Susceptibilità magnetica	0-50 km	~0,5 km
MT	Resistività ρ	0-1000 km	~1-10 km
CSEM	Resistività ρ	0-5 km	~50-200 m
Sismica riflessione	Impedenza $Z = \rho v$	0-10 km	~20-50 m

Sismica rifrazione	Velocità v	0-1 km	~10-20 m
GPR	Permittività ε, σ	0-30 m	~0,1-1 m

Esempio Integrato: Esplorazione Mineraria

Obiettivo: Localizzare deposito di solfuri massivi (densità alta, conducibilità alta, magnetizzazione variabile).

1. **Aeromagnetometria** (survey aereo): identifica anomalie magnetiche associate a mineralizzazione ricca in magnetite/pirotite → seleziona target aree (~10 km²)

2. **Gravimetria terrestre** (survey ground): profili dettagliati su target areas → conferma anomalie positive indicanti alta densità (~1 km²)

3. **EM induttivo (ground TDEM)**: misura conducibilità → identifica zone ad alta conducibilità (solfuri) con profondità stimata (~100 m depth)

4. **Sismica rifrazione/riflessione shallow**: definisce geometria ospitante rocce, profondità bedrock

5. **Perforazione esplorativa**: conferma mineralizzazione, campionamento per analisi geochimiche

L'integrazione riduce il rischio esplorativo: solo target con anomalie concordanti in più metodi vengono perforati, riducendo costi (~$100k-500k per pozzo esplorativo).

Inversione Congiunta

L'inversione congiunta ottimizza simultaneamente modelli di diverse proprietà fisiche (ρ_density, ρ_resistivity, v) vincolando che i contrasti di proprietà siano spazialmente correlati (assumono struttura geologica comune). Matematicamente:

$$\min \{||d_{grav} - G_{grav}(\rho_{dens})||^2 + ||d_{MT} - G_{MT}(\rho_{res})||^2 + \lambda_1||\nabla\rho_{dens}||^2 + \lambda_2||\nabla\rho_{res}||^2 + \lambda_3||\nabla\rho_{dens} - \alpha\nabla\rho_{res}||^2\}$$

Il termine λ_3 è il vincolo di accoppiamento strutturale. L'inversione congiunta produce modelli più robusti e geologicamente plausibili rispetto a inversioni separate.

Conclusioni e Prospettive

I metodi geofisici esplorativi sono strumenti indispensabili per caratterizzazione del sottosuolo in molteplici applicazioni: energia (petrolio, gas, geotermia), risorse minerarie,

idrogeologia, geotecnica, archeologia, e studi accademici di struttura terrestre. I progressi tecnologici continuano a migliorare capacità:

Strumentazione

- Gravimetri quantistici (cold atom interferometry): sensibilità ~1 μGal, portabili
- Sensori EM superconduttivi (SQUID): sensibilità estrema per segnali deboli
- Acquisizione sismica 3D/4D: densità maggiori (spacing <10 m), ripetibilità elevata

Processing e Inversione

- Full-waveform inversion (FWI): usa l'intero sismogramma (non solo tempi di arrivo) per inversione ad alta risoluzione
- Machine learning: classificazione automatica facies, QC dati, accelerazione inversioni
- Cloud computing: inversioni 3D massive-scale su cluster distribuiti

Integrazione Dati

- Piattaforme integrate multifisiche: visualizzazione e inversione congiunta di gravità, magnetometria, sismica, EM, well logs
- Assimilazione dati in modelli dinamici: aggiornamento continuo di modelli reservoir con nuovi dati di produzione

La sfida futura è migliorare la quantificazione delle incertezze nei modelli interpretati, essenziale per decision-making (dove perforare? quale volume di risorse?) in contesti economici dove errori costano milioni. L'approccio bayesiano e l'inversione probabilistica stanno diventando standard per fornire non solo modelli ottimali ma distribuzioni complete di probabilità sui parametri geologici.

L'integrazione stretta tra geofisica, geologia, petrophysics, e ingegneria di reservoir continuerà a guidare il successo esplorativo nel 21° secolo, mentre la sostenibilità e l'impatto ambientale richiedono tecnologie sempre meno invasive e più efficienti.

La geofisica matematica si trova di fronte a sfide straordinarie e opportunità senza precedenti. L'aumentare della potenza computazionale, il crescente volume di dati di osservazione, e lo sviluppo di nuove tecniche matematiche stanno aprendo nuove frontiere di ricerca. Una direzione promettente è l'integrazione di machine learning e intelligenza artificiale con la modellazione fisica. Le reti neurali profonde possono apprendere relazioni complesse dai dati e potrebbero essere utilizzate per parametrizzare processi sub-griglia nei modelli climatici, per accelerare componenti computazionalmente costose, o per scoprire nuove relazioni empiriche.

Tuttavia, l'interpretabilità fisica dei modelli di machine learning rimane una sfida: un modello può fare previsioni accurate senza necessariamente catturare i meccanismi fisici sottostanti. La quantificazione dell'incertezza diventerà sempre più centrale. Piuttosto che fornire singole previsioni deterministiche, i sistemi di previsione del futuro forniranno distribuzioni di probabilità complete, permettendo decisioni basate sul rischio. Questo richiederà sviluppi nella teoria dell'assimilazione dei dati, nella modellazione stocastica, e nei metodi di ensemble.

L'osservazione della Terra da satellite sta entrando in una nuova era con costellazioni di satelliti che forniscono copertura quasi continua con risoluzione spaziale e temporale sempre maggiore. L'integrazione di questi dati massivi con modelli numerici richiederà algoritmi efficienti di assimilazione e infrastrutture di calcolo distribuite. Il paradigma del "digital twin" della Terra - una replica digitale completa del sistema Terra che evolve in tempo reale assimilando continuamente osservazioni - sta emergendo come obiettivo a lungo termine.

La comprensione dei tipping points e dei cambiamenti ex abrupto nel sistema climatico richiederà progressi nella teoria dei sistemi dinamici non lineari. Identificare early warning signals di transizioni imminenti, distinguere variabilità interna da cambiamenti forzati, e quantificare la probabilità di eventi estremi sono problemi matematici profondi con implicazioni pratiche cruciali. In conclusione, la geofisica matematica rappresenta una sintesi straordinaria di matematica pura, fisica fondamentale, e scienza applicata. Le equazioni che governano i fenomeni terrestri - dalle onde sismiche che rivelano l'interno del pianeta, ai flussi turbolenti che trasportano calore negli oceani, ai campi magnetici generati nel nucleo - sono tra le più belle e complesse della fisica matematica. La loro soluzione richiede creatività, rigore matematico, e un profondo apprezzamento della complessità del sistema Terra. Mentre continuiamo a sviluppare nuovi strumenti matematici e computazionali, la nostra capacità di comprendere, prevedere e forse anche gestire il sistema Terra continuerà a evolversi, affrontando le sfide del ventunesimo secolo e oltre.